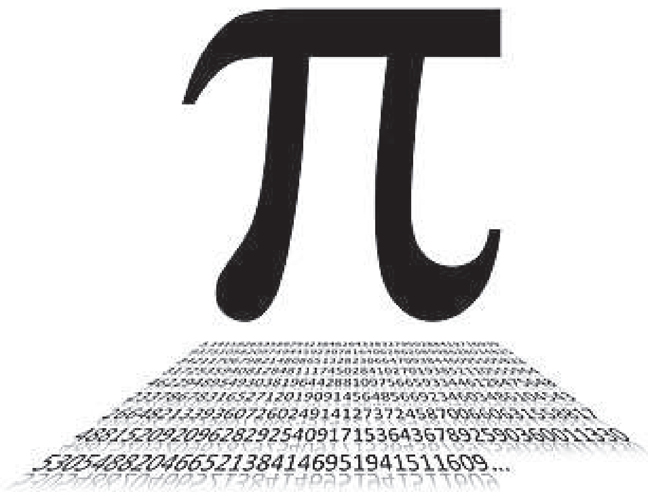
Ecuaciones diferenciales de primer orden y sus aplicaciones



2025

Carmen Elena Mantilla Cabrera
Paulina Fernanda Bolaños Logroño
Fernando Ricardo Márquez Sañay
Francisco Eduardo Toscano Guerrero

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SUS APLICACIONES

Carmen Elena Mantilla Cabrera

Paulina Fernanda Bolaños Logroño

Fernando Ricardo Márquez Sañay

Francisco Eduardo Toscano Guerrero

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

espoch

Carmen Elena Mantilla Cabrera
Paulina Fernanda Bolaños Logroño
Fernando Ricardo Márquez Sañay
Francisco Eduardo Toscano Guerrero

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)
Riobamba – Ecuador
Panamericana Sur Km. 1½
Teléfono: 593 (03) 2998-200
Código Postal EC0600155

EDICIÓN: enero 2025
Publicado por acuerdo con los autores.
Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego *(peer review)*

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SUS APLICACIONES
ISBN: 978-9942-48-873-2
Fecha de asignación: 2025-01-08

espoch

ÍNDICE

PREFACIO

Dentro del amplio campo de estudio de las Ciencias Aplicadas se consideran a las diferentes asignaturas que basan sus estudios en ecuaciones, estas desarrollan sus conocimientos en base a principios y leyes manifestadas en las ciencias fundamentales como la matemática, física, biología, química, etc., el desarrollo de estos conocimientos se considera la fuente de la mayoría de las teorías científicas y aplicativas, por ende el punto de partida de las resoluciones en las carreras universitarias y las aplicaciones en el área de ingeniería o en el ámbito educativo.

El presente libro se ha desarrollado con la finalidad de sintetizar las resoluciones de modelos matemáticos representados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con el uso de medios tecnológicos en las resoluciones y aplicaciones en problemas profesionales.

En el desarrollo de carreras de ingeniería, en específico las asignaturas de Matemáticas y Métodos numéricos de las carreras de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) contemplan el estudio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs) de Primer Orden y Métodos Numéricos para EDO de Primer Orden, debido a que gran parte de los procesos físicos, biológicos y otros se pueden resolver mediante procedimientos matemáticos analíticos y numéricos.

También, pretende contribuir en el progreso estudiantil con estos conocimientos, sin embargo, hay que considerar que previo a solucionar las EDOs, los estudiantes deben tener conocimientos matemáticos previos como algebra, funciones, límites, calculo integral y diferencial para mejor comprensión de lo expuesto.

Los ejemplos y aplicaciones de los temas de este libro se basan en apuntes elaborados de experiencias en docencia e investigación de los profesores de las mencionadas cátedras en las carreras de Agronomía, Ingeniería Ambiental, Ingeniería Civil, etc., se desarrollan ejercicios de interés para el área ingenieril con el fin de enfocar el uso de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, sus aplicaciones y los métodos analíticos y numéricos de resolución en diferentes procesos de ingeniería que pueden aportar a la comprensión de desarrollos tecnológicos y en consecuencia su aplicabilidad, lo que incita al estudiante a despertar curiosidad y autoeducación en estos temas.

El texto del libro se presenta divido en tres áreas bien definidas: la primera parte esencialmente metodológica, se refiere a los distintos métodos de soluciones analíticas de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, el objetivo principal de esta sección es proporcionar al estudiante los fundamentos teóricos necesarios para analizar y resolver problemas de EDOs de primer orden en ejercicios matemáticos y aplicaciones direccionados a las ingenierías. Se exhiben las diversas formas en las que puede presentarse los problemas de EDOs (clasificación), y como adecuarlas para la aplicación del método de resolución, lo que permitirá al estudiante generar destrezas en el desarrollo de estos ejercicios.

La segunda parte presenta tres métodos numéricos fundamentales para hallar soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, esto complementa las metodologías de soluciones a las EDO en caso de no ser posible hallar una solución por un método analítico, al mismo tiempo se convierte en una poderosa herramienta para el futuro profesional debido a que el uso de herramientas computacionales le permite ahorro de tiempo y la simulación para análisis y compresión de un fenómeno.

Por último, se mantiene en la estructura y redacción del escrito una visión pedagógica, donde estos dos temas convergen para presentar aplicaciones en el área profesional, se desarrollan soluciones analíticas y numéricas (siempre que sea posible), es aquí donde este libro muestra su potencial, ya que estos ejemplos de aplicación son específicos del área de ingeniería y son explicados a detalle para comprender el porqué de la aplicación del método de solución e interpretación de la solución en el ámbito que se ha obtenido.

Además, el objetivo fundamental de este texto contempla al exponerse como ayuda pedagógica para el desarrollo de los estudiantes que aprenden ecuaciones diferenciales ordinarias y métodos numéricos, se conciba la importancia de estos temas con sus aplicaciones, y sirva de base para comprender temas en asignaturas posteriores y que también se motive a los alumnos a profundizar con investigación.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y ALGUNAS APLICACIONES

FILOSOFÍA Y MOTIVACIÓN: APRENDIZAJE DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN INGENIERÍA

En nuestra vida cotidiana diariamente realizamos cálculos numéricos; procesamos números desde aplicaciones muy simples como en transacciones monetarias diarias, hasta aplicaciones muy avanzadas en el ámbito profesional, luego, resolver numéricamente alguna operación matemática incentiva al desarrollo analítico de la persona que lo realiza, por lo tanto, el conocimiento de la matemática es necesario para todos los espacios de nuestra vida.

Los estudiantes que cursan sus estudios de tercer nivel (politécnico, tecnológico o universitario), requieren conocer y dominar el uso de herramientas matemáticas que les ayudará a encontrar soluciones a los diversos problemas en escenarios profesionales.

Generalmente, los estudios de matemáticas en tercer nivel inician con el aprendizaje del *cálculo diferencial e integral* los cuales son la base fundamental para la resolución de problemas de ingeniería con ecuaciones diferenciales, de esta manera, dominar estos conocimientos involucran técnicas y métodos de resolución matemáticas, así mismo, el análisis y razonamiento de una determinada situación a ser resuelta. (Carmona, I.; López, E., 2011)

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) son muy utilizadas para establecer algún principio físico, químico, biológico, etc., ya que en ella se involucran todas las variables necesarias, de esta manera, el estudio de EDOs se incluye en la gran mayoría de profesionales en el área de ingeniería.

La práctica de la ingeniería enfrenta grandes retos técnicos y tecnológicos por lo que es necesario adquirir destrezas y habilidades para afrontar con efectividad dichos retos, entonces estos profesionales deben poseer mayor capacidad de análisis y síntesis para la interpretación de resultados y generar soluciones a los problemas del campo simples y complejos.

Los avances en el progreso de la ingeniería se centran en la obtención de desarrollos tecnológicos, mediante reconversiones de energía, manejo eficiente y sostenible, que aporten a la modernización.

Entonces la matemática en la formación del ingeniero proporciona los conocimientos, habilidades y destrezas para plantear y resolver problemas prácticos y teóricos en áreas de su actividad profesional, utilizando la formulación e interpretación de modelos en términos matemáticos con pensamiento lógico y objetivo, para simular, estructurar y valorar datos intuitivos y empíricos mediante cálculos, instrumentos de medidas y representaciones gráficas como herramientas de análisis e interpretación de fenómenos y ciencias relacionadas.

Además, frecuentemente los datos generados en experimentos o ensayos se deben modelar mediante funciones y ecuaciones diferenciales lo que requiere para obtener un resultado resolver ecuaciones o sistemas de ecuaciones que muchas de las veces no son lineales y que no se pueden resolver por métodos analíticos sino por métodos numéricos. En ocasiones se requiere soluciones de problemas en los que influye el tiempo, también presentar datos y resultados en gráficas generadas a partir de los resultados numéricos para un análisis por medio de un computador para diseñar esquemas numéricos eficientes para obtener soluciones apropiados con el uso racional de los recursos computacionales disponibles.

En el campo amplio de todas las carreras de estudios superiores a nivel universitario se requiere manejar adecuadamente el razonamiento y entendimiento lógico matemático, es así que el presente libro busca contribuir con el estudio de las ciencias de ecuaciones diferenciales ordinarias en el ámbito profesional aplicativo de distintas ramas.

La resolución numérica implicada el uso de software matemático, que en este caso se recomienda Octave y Microsoft Excel, como una herramienta informática fácil y útil.

CONOCIMIENTOS PREVIOS Y REQUERIMIENTOS

Para la resolución de EDOs se requiere conocer de antemano las técnicas matemáticas de derivación e integración de funciones (para la resolución analítica) y el manejo de programas computacionales básicos que reducirán considerablemente los tiempos de respuesta al ejercicio (para resolución numérica). (Carmona, I.; López, E., 2011)

De la misma manera que en cualquier otro proceso de aprendizaje, se debe tener muy claro el concepto teórico fundamental, para luego aplicar las técnicas de resolución necesarias.

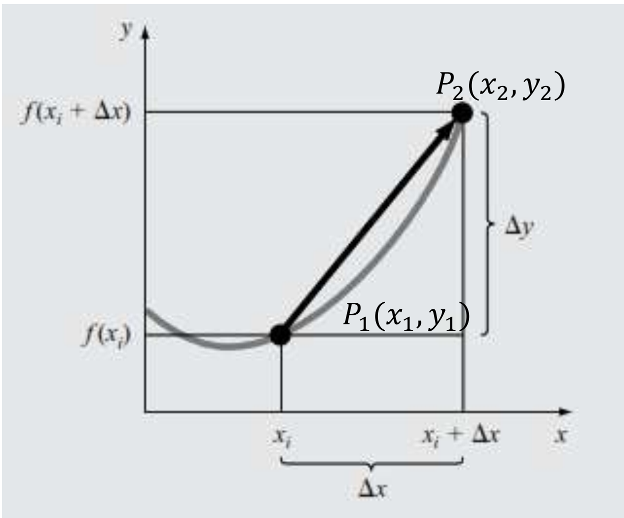
RAZONES DE CAMBIO O GRADIENTES:

En problemas de ingeniería se debe considerar que la mayoría de los procesos a analizar no son fijos o estáticos, por el contrario, se tratan de procesos con continuos cambios (por ejemplo: cambios de posición, de velocidad, de dimensión, de concentración, de tiempo de modificación etc.).

Es por ello, que se debe conocer el proceso de *diferenciación* que establece los cambios de una variable respecto a otra. Para este proceso se aplica las técnicas de *derivación*. El objetivo será obtener un valor numérico que corresponde a la variación instantánea. Para este proceso se puede utilizar métodos gráficos, o métodos analíticos. (Nieto, H., 2004)

Al plantear el problema de la recta tangente a una función (en un punto), los primeros cálculos plantearon utilizar otro punto dentro de la misma función, trazar una recta secante que una esos puntos, sin embargo, para obtener la recta secante se deberá acercar los puntos utilizando para ello las técnicas de resolución por *límites de funciones,* de esta manera, una primera interpretación de una recta tangente (RAZÓN DE CAMBIO) está dado por la ecuación:

Figura 1. *Razón de cambio.*



Fuente: *(Chapra, S.; Canale, R., 2015)*

$$\mathrm{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{1}$$

(Razón de cambio de la variable y respecto a x)

Según la ecuación (1), Δy representa el cambio de posición en el eje de las ordenadas, Δx representa el cambio de posición en el eje de las abscisas.

Encontrar la pendiente de la recta tangente *m* o razón de cambio representa el proceso de derivación (Nieto, H., 2004)

En esta primera aproximación se está obteniendo una recta secante, y se busca obtener una recta tangente el en punto P_2, para ello corresponde ir "acercando" el punto P_1 a una posición muy cercana a P_2, es decir, se irá reduciendo el valor de Δx hasta un valor mínimo (teóricamente a la aplicar límites la tendencia de Δx será cero).

$$m = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

Siendo Δx la variación de la variable independiente *x* (PASO):

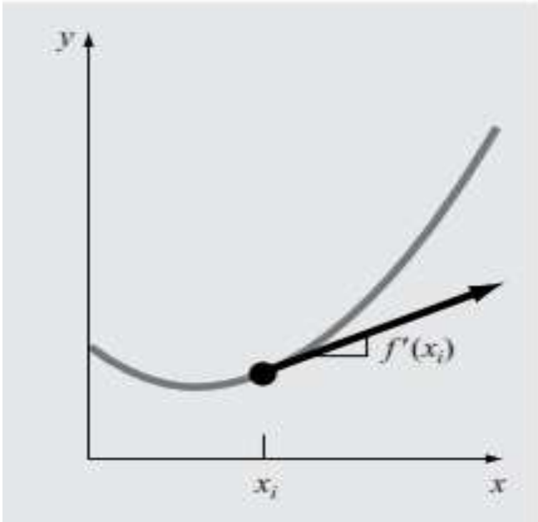
$$\Delta_x = x_2 - x_1$$

En base a la Ilustración 1, al ubicar el punto P_2 en función de Δx

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \tag{3}$$

Siendo x_i el punto en el cual se busca la razón de cambio.

Figura 2. *Pendiente de la recta tangente.*



TIPOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

Las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas fundamentales que describen cómo cambian las cosas en función de otras variables. Pueden ser ordinarias (EDO) si dependen de una sola variable independiente o parciales (EDP) si involucran múltiples variables independientes.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

Se trata de expresiones matemáticas que relacionan variables (dependiente e independiente) en forma de ecuación, cada uno de sus términos representan algún proceso físico real o establecen las características de la información. La característica principal de estas ecuaciones es que uno o algunos de sus términos se establecen como una *razón de cambio*, es decir, al ir cambiando la variable independiente, la variable dependiente no adquiere un valor puntual, sino más bien una diferenciación que puede ser positiva o negativa. (Carmona, I.; López, E., 2011)

El uso de las EDO es amplio en el ámbito de ingeniería y relaciones de variables físicas reales mediante el uso de modelos matemáticos.

$$\frac{dy}{dt} = v_0 + vt \tag{4}$$

La expresión (4) se trata de una EDO que determina la posición de un cuerpo en función del tiempo *t* y la velocidad que posea *v*, se puede identificar que tiene una variable dependiente *y,* y posee una variable independiente *t,* por lo tanto, en su resolución se deberá incluir métodos de resolución por EDO.

Otro ejemplo puede ser el crecimiento de una población de bacterias que crece proporcionalmente a su tamaño, esto se modela con una EDO básica:

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

Esta se puede interpretar con la variación de la población con respecto al tiempo es proporcional a la población. Donde:

P es el tamaño de la población.
t es el tiempo.
r es la tasa de crecimiento proporcional.

En el contexto de la ingeniería agronomía, se pueden modelar con EDOs cambios simples, como la altura de la planta o el volumen total, en función del tiempo, una de las aplicaciones que se puede mencionar es el crecimiento en altura de una planta:
Si el crecimiento en altura de la planta es proporcional a su tamaño actual, se puede modelar con la ecuación:

$$\frac{dh}{dt} = rh$$

Donde:

$h(t)$ es la altura de la planta en función del tiempo.
r es la tasa de crecimiento proporcional.

Otra situación en este contexto puede ser, cuando se modela el crecimiento de una planta con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en una sola ecuación que incluye varias variables dependientes, estas variables interactúan en una misma expresión, representando fenómenos combinados dentro de un único modelo, este enfoque permite relacionar diferentes aspectos del crecimiento de la planta.

Entonces el crecimiento de una planta puede estar relacionado con altura y biomasa como variables dependientes

Supongamos que el crecimiento de una planta está influenciado por su altura $h(t)$ y su y su biomasa $b(t)$, ambas dependientes del tiempo (t). La ecuación diferencial que describe el crecimiento podría ser:

$$\frac{dh}{dt} = k_1 b(t) - k_2 h(t) b(t)$$

Donde:

$k_1 b(t)$: Representa el crecimiento de la altura de la planta impulsado por la acumulación de biomasa, cuanto mayor sea la biomasa, más rápido crecerá la altura.

$-k_2 h(t) b(t)$: Este término indica que a medida que la planta crece en altura $h(t)$ y aumenta la biomasa $b(t)$, el crecimiento se ralentiza debido a limitaciones de recursos o energía.

Por lo tanto, esta ecuación muestra que el crecimiento de la altura depende directamente de la biomasa acumulada, pero también se ve afectado negativamente por el tamaño actual de la planta, ya que las plantas más altas y con más biomasa requieren más recursos para mantener su crecimiento.

ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (EDP)

De la misma manera que las EDO, existen ecuaciones en las cuales sus variables representan algún proceso en específico, sin embargo, de existir más de una variable independiente, se requerirá en su resolución el uso de derivadas parciales. Es decir, se podrá diferenciar (derivar) por cada variable independiente que existiera. En estas expresiones se deberá considerar que las variaciones o razones de cambio también será en relación con cada variable independiente.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

La expresión (5) es conocida como la Ecuación de Laplace, en ella se puede identificar que tiene una variable dependiente *u* y posee dos variables independientes *x* e *y,* por lo tanto, en su resolución se deberá incluir métodos de resolución por derivadas parciales (EDP).

Otro ejemplo de ecuación diferencial parcial puede ser la transferencia de calor, el flujo de calor en una barra metálica puede modelarse con la ecuación de difusión térmica, donde la cantidad de calor (u) depende del momento y también de la distancia en la que se mide esta cantidad de calor en la barra, se representa con la EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde:

$u(x, t)$ es la temperatura en la posición x y el tiempo t.
α es la difusividad térmica del material.
$\frac{\partial u}{\partial t}$ es la tasa de cambio de la temperatura en el tiempo.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ es la curvatura espacial de la temperatura.

En el contexto de la ingeniería agronómica una de las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), se puede utilizar para modelar situaciones cuando el crecimiento de la planta depende de múltiples variables independientes, como el tiempo (t) y el espacio (x, y, z).

Por ejemplo, para determinar la distribución del crecimiento en una hoja que puede depender de la posición en la hoja y del tiempo, entonces la ecuación se escribirse como:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right) + S(x, y, t)$$

Donde:

$h(x, y, t)$ es el grosor o tamaño de la hoja en la posición (x, y) y tiempo (t)
D es un coeficiente de difusión que describe cómo se distribuye el crecimiento.
$S(x, y, t)$ es una fuente de crecimiento que podría depender de la cantidad de luz o nutrientes en esa región.

La ecuación permite predecir cómo se distribuye el grosor o tamaño de la hoja en diferentes puntos de la hoja en el tiempo cuando la que la luz incide de manera desigual, lo que provoca un crecimiento mayor en ciertas áreas ($S(x, y, t)$ no es constante).

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES (SED)

Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de ecuaciones en las que varias funciones desconocidas dependen de una o más variables independientes, y las ecuaciones están relacionadas mediante derivadas. Este tipo de sistema se utiliza para modelar fenómenos en los que múltiples variables interactúan y evolucionan de manera simultánea en el tiempo o el espacio. Matemáticamente, un sistema de este tipo tiene la forma general:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

Donde:

$x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables dependientes, t es la variable independiente (usualmente el tiempo).

$f_1, f_2, \dots, f_n$ son funciones que describen la dinámica del sistema.

Estos sistemas son ampliamente utilizados en física, biología, economía y otras disciplinas para analizar interacciones complejas. En biología, un sistema de ecuaciones diferenciales puede describir el crecimiento de una planta, donde la altura, el volumen de las raíces y los niveles de nutrientes interactúan entre sí

Entonces, el crecimiento de una planta puede ser modelado mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) que involucran varias variables dependientes, lo que permite capturar la interacción entre diferentes aspectos del desarrollo de la planta, como la altura, la biomasa, el volumen de raíces y las reservas de nutrientes, las variables dependientes están interrelacionadas y cambian en función de una sola variable independiente tiempo t.

Para modelar el crecimiento de una planta considerando:

Altura de la planta $h(t)$.
Volumen del sistema radicular $r(t)$.
Reservas de nutrientes en la planta $n(t)$.

Estas variables están interconectadas, ya que el crecimiento de las raíces afecta la captación de nutrientes, y los nutrientes influyen en el crecimiento de la planta en altura. El sistema de EDO puede expresarse como:

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dt} = k_1 n - k_2 h \\ \dfrac{dr}{dt} = k_3 n \\ \dfrac{dn}{dt} = k_4 r - k_5 hn \end{cases}$$

Donde:

k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 son constantes que describen las tasas de crecimiento o interacción entre las variables.

La primera ecuación $\frac{dh}{dt} = k_1 n - k_2 h$ muestra que la altura crece proporcionalmente a la cantidad de nutrientes (n) disponibles, pero se ralentiza con el aumento de la altura ($k_2 h$, que representa limitaciones físicas o energéticas).

La segunda ecuación $\frac{dr}{dt} = k_3 n$ modela el crecimiento de las raíces como proporcional a la cantidad de nutrientes.

Y la tercera ecuación $\frac{dn}{dt} = k_4 r - k_5 hn$ describe el cambio en los nutrientes como la diferencia entre la captación desde las raíces ($k_4 r$) y el consumo por el crecimiento ($k_5 hn$).

También, los sistemas de ecuaciones diferenciales se utilizan ampliamente en el estudio del control biológico, especialmente en el análisis de la interacción entre una población de plagas y sus depredadores naturales. Este tipo de modelo se basa en la dinámica depredador-presa**,** que describe cómo las poblaciones de ambas especies cambian en el tiempo. En el contexto las plagas (presa) produce daños, mientras que el depredador, introducido o incentivado mediante prácticas de control biológico, ayuda a reducir la población de plagas (Zill, 2002).

El modelo básico Depredador-Presa de Lotka-Volterra, es un sistema típico de ecuaciones diferenciales que describe esta interacción es:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

Donde:

$x(t)$: población de plagas (presas) en función del tiempo.
$y(t)$: población de depredadores en función del tiempo.
a: tasa de crecimiento natural de las plagas (sin depredadores).
b: tasa de depredación, que describe la eficiencia del depredador al cazar plagas.
c: tasa de mortalidad natural de los depredadores.
d: tasa de crecimiento del depredador gracias a la depredación.

La ecuación de $\frac{dx}{dt}$ muestra que la población de plagas crece exponencialmente (ax), pero disminuye proporcionalmente al número de interacciones entre plagas y depredadores (bxy).

La ecuación de $\frac{dy}{dt}$ describe que la población de depredadores decrece por su mortalidad natural $(-cy)$, pero aumenta proporcionalmente al número de plagas capturadas (dxy).

La aplicación de este modelo para control biológico de plagas en un cultivo ayuda a entender cómo introducir un depredador específico, como insectos beneficiosos como las mariquitas para controlar pulgones, y poder estabilizar la población de plagas sin necesidad de usar pesticidas. El sistema de ecuaciones permite simular el impacto de introducir depredadores ya que ayuda a determinar cuántos depredadores son necesarios para mantener la población de plagas por debajo del umbral de daño económico.

También determina las dinámicas de equilibrio al identificar puntos donde ambas poblaciones se estabilizan (equilibrio coexistente) o condiciones donde las plagas son eliminadas. Y se consideran las estrategias del manejo que permite evaluar el efecto de diferentes tasas de crecimiento de plagas o depredadores, considerando factores externos como cambios estacionales.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL

Son expresiones matemáticas en las que además de la EDO o EDP, se incluye una o varias condiciones iniciales, con ello, en el desarrollo de la resolución se considerarán estos valores como requisito a cumplir. Si se trata de un ejercicio de problema de valor inicial (PVI) este tendrá una sola solución. Como se ha establecido, los ejercicios de EDO contienen en alguno de sus términos una diferencial, por eso es lógico pensar que en la resolución se debe utilizar las técnicas de integración, y como se conoce de antemano, al integrar una función aparecerá la constante de integración C, calculada fácilmente con las condiciones iniciales. Por ejemplo:

$$y' + y = y\left(\mathrm{t}e^{t^2} + 1\right) \qquad y\,(0) = 1 \tag{6}$$

En la expresión (6) se puede identificar: la variable dependiente *y,* la variable independiente t y la condición inicial $y(0) = 1$. Esta expresión indica que, a más de la resolución de la EDO se deberá considerar también la condición inicial:
cuando $x = 0\,, y = 1$.

MODELOS MATEMÁTICOS

Son ecuaciones alfanuméricas en forma de igualdad que han resultado de mediciones reales y que representan algún proceso analizado. Generalmente se obtienen con datos experimentales tabulados, que tras el procesamiento de su información se obtienen expresiones que representan el proceso físico matemático. Son muy utilizados en el área estadística, ya que consideran información inicial y son desarrollados para predecir información hacia el futuro, por ejemplo:

$$\frac{dR}{dt} = \beta\left(N - R(t) - S_0 e^{\frac{-\alpha R}{\beta}}\right), \qquad R(0) = 0 \tag{7}$$

En la expresión (7), se ejemplifica claramente un PVI que representa un modelo matemático, se denomina "Modelo matemático para el COVID 19 en España", en el cual se puede evidenciar la relación de variables en una sola ecuación matemática (incluida una razón de cambio), y una condición inicial.

Los modelos matemáticos solo son ecuaciones que suelen resolverse con EDO o Transformadas de Laplace.

Son muchas las razones que justifican hoy en día la modelización matemática, pero debemos de destacar, en primer lugar, el mejor conocimiento de los procesos, y en segundo lugar, el espectacular avance de los ordenadores y el software matemático. Con frecuencia la palabra modelo tiene distintas interpretaciones, se aplica en el presente libro el sentido dado por el profesor Sixto Ríos: "un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones, que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible una porción de la realidad empírica". Por tanto, un modelo es la representación de un proceso. Si en un fenómeno se conocen los procesos internos y las relaciones entre ellos, entonces es posible conocer las ecuaciones (que dependerán de si el modelo es discreto o continuo) que lo describan y a las que llamaremos un modelo matemático del fenómeno biológico. Como es natural, de un mismo fenómeno biológico se puede construir muchos modelos matemáticos diferentes entre sí, cuyo grado de eficacia depender 'a del conocimiento de los procesos que se investigan y de las posibilidades de experimentación.

Los Modelos matemáticos en su construcción están basados en:

1. La observación y en la descripción de las características de las variables.
2. El desarrollo de hipótesis o explicaciones.
3. La comprobación por experimentación de dichas hipótesis.
4. La aplicación de estos conocimientos en la resolución de problemas similares.

Suponiendo un problema concreto: por ejemplo, determinar la cantidad de conejos que existirán dentro de un año conocida la población actual, en un entorno que presenta cierta estabilidad. Ante esta situación, podemos recurrir a observaciones anteriores e intentar estimar el dato pedido, es decir, usar una herramienta estadística y proponer un resultado acertado según la complejidad de la técnica empleada. Pero si el problema abordado es tal, que apenas se dispone de datos actuales o pasados, se debe elaborar un modelo que sea capaz de dar solución al problema planteado y además aporte información, de tal manera que la actuación en el futuro sea la más acertada. Esta última situación es la que se presenta con más frecuencia cuando se estudia un fenómeno de cualquier tipo, es evidente, que una de las ventajas del uso de los modelos matemáticos es su bajo costo, si se lo compara con los modelos físicos. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Por ejemplo, es mucho más barato y rápido elaborar un modelo matemático que describa la evolución de la población de conejos que empezar con un determinado número de conejos y esperar cierto tiempo para poder experimentar con ellos.

Elaboración de modelos matemáticos

Los modelos y la realidad están relacionados a través de dos procesos: la abstracción y la interpretación. El primero de ellos obliga a encontrar cuales son los elementos más importantes del problema y cuáles son los accesorios. Para saber si un elemento es o no importante tendremos que ver su efecto relativo en la evolución del sistema. En cuanto a la interpretación, se debe entender la manera en que las componentes del modelo (parámetros, variables) y su comportamiento pueden estar relacionadas con las componentes, características y comportamiento del sistema real que se quiere modelar. Por tanto, la primera de las fases necesaria para construir un modelo matemático es la abstracción, para ello se tiene que establecer ciertas hipótesis, definir las variables y desarrollar las matemáticas adecuadas para poder resolver el problema. La fase siguiente es tratar de simplificar las herramientas matemáticas utilizadas. Los resultados deducidos del modelo matemático deberían llevar a poder hacer predicciones sobre el mundo real. El paso siguiente sería recoger datos de la situación de la que se ha extraído el modelo y compararlos con las predicciones.

A continuación, se expone más detenidamente los pasos a seguir para construir un modelo matemático:

1. Se debe empezar formulando las siguientes preguntas:
   ¿Qué información necesitamos?
   ¿A qué se reduce ahora el problema?
2. Descripción cualitativa del modelo.

Se debe iniciar por el más simple que describa el comportamiento del sistema. Ver si los resultados que aporta el modelo dan respuesta a las preguntas planteadas.

3. Descripción cuantitativa del modelo.

   Definir las variables y ver la manera en que están relacionadas. Definir los parámetros del modelo, y asegurar de que cualquier otro parámetro es redundante.

4. Introducción de las ecuaciones del modelo. Se escriben las ecuaciones, con la ayuda de un diagrama o de una tabla.
5. Análisis de las ecuaciones. Comprobar que su análisis da respuesta a las cuestiones planteadas. Se encuentra la solución general.
6. Volver a examinar las hipótesis. Se intenta simplificar el modelo. Si el modelo no responde a las preguntas iniciales, debemos volver a los pasos (3), (4) y (5).
7. Relacionar los resultados encontrados con hechos conocidos.

A continuación, se plantea un ejemplo elemental, en concreto la evolución de un cultivo de cierto tipo de células, para construir un modelo matemático.

Descripción del fenómeno real y objetivos del modelo: Para conocer cómo evoluciona el cultivo se realiza diversos experimentos y se observa un rápido crecimiento de la población. El tipo de preguntas que podemos hacer son las siguientes: ¿cómo varía el número de células con el tiempo?, ¿qué tipo de variables influyen en su desarrollo?

Elección de variables. En la fase de experimentación se observa que la célula crece, se divide en dos y cada una inicia el proceso de crecimiento. Se detecta además que el tiempo necesario para que crezca una célula y se duplique es aproximadamente 20 minutos. Por tanto, el tiempo de vida de una célula, se puede considerarlo como una variable que interviene en el problema. Hay muchas otras variables, que pueden clasificarse en variables de entrada, que pueden influir en los resultados, y variables de salida, que corresponden a los resultados. En el problema propuesto, seleccionamos como variable de salida el número de células existente en el cultivo en el tiempo t. El tiempo t transcurrido desde el instante inicial será la variable independiente.

Relaciones cualitativas entre las variables. De los experimentos realizados se desprende que, bajo las mismas condiciones de partida, el número de células del cultivo crece con el tiempo.

Recopilación de datos. En la Tabla 1.1 aparecen los datos recogidos en la fase de experimentación. Observemos que los datos recopilados permiten ser ajustados por los valores, 100, 2 × 100, 2 2 × 100, 2 3 × 100, 2 4 × 100, que corresponden a un crecimiento exponencial. Este ´último paso es el verdaderamente importante en el proceso de modelado.

Tabla 1. *Datos recogidos ejemplo de crecimiento de células.*

Instante	Tiempo	Núm. células
0	0	100
1	20	209
2	2x 20	415
3	3x 20	790
4	4x 20	1610
…	…	…

Modelo empírico de crecimiento. Como consecuencia de la etapa anterior, se observa que el proceso de multiplicación de las células se puede describir como “una duplicación de la población cada 20 minutos”. En esta fase y en las anteriores, son fundamentales los métodos de recopilación y análisis de datos.

Construcción del modelo matemático. Empezamos generalizando la situación anterior, en el sentido siguiente: sea N el número de células en el cultivo en el instante inicial, y supongamos que la población se multiplica por α en T minutos. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Bajo estas hipótesis tendremos en los instantes 0, 1×T, 2×T, 3×T, las poblaciones N, αN, α2N, α3N, En consecuencia, si *y(t)* representa al número de células en el cultivo en el instante t, sabemos que:

$$y(0) = N, \quad y(t) = \alpha\, y(t-1).$$

Consecuencias del modelo. Del modelo construido podemos deducir algunos resultados:

• Es inmediato comprobar que de las hipótesis anteriores se obtiene

$$y(t) = N\alpha t.$$

• También es fácil encontrar el número de períodos T necesarios para pasar de N células a Ne.

$$t = \frac{\ln N - \ln N}{\ln \alpha}$$

Aplicación práctica. Encontrar el número de períodos de tiempo necesarios para pasar de 400 células a 3210

$$\frac{\ln 3210 - \ln 400}{\ln 2} = 3$$

Validación del modelo. Es el proceso de contrastar las predicciones propuestas por el modelo con los datos experimentales. Es evidente que si existen grandes diferencias entre estos valores debemos de rechazar el modelo propuesto. Una buena herramienta de trabajo en esta fase son las pruebas de hipótesis.

Predicción. Una vez que por la etapa anterior nos hemos asegurado de la validez del modelo, pasamos a la etapa de predicción. Por ejemplo, en la situación que estamos analizando, si queremos obtener 3.200 células a partir de 400 células, se necesita que pasen 3 períodos que equivalen a 60 minutos.

Nuevo proceso de modelización. Si llegamos a la conclusión de que nuestro modelo no es válido, entonces debemos retomar los datos experimentales y proponer uno nuevo que sea más adecuado.

Por último, un modelo matemático debe tener las siguientes cualidades:

Debe ser coherente, debe dar cuenta de todas las observaciones anteriores y permitir prever el comportamiento futuro del fenómeno biológico. Tiene que permitir su generalización, dentro de ciertos límites que conviene determinar previamente.

Debe ser robusto, para poder responder a los cambios de los valores de los parámetros.

Y, por último, debe ser flexible, en el sentido de que pueda ser cambiado y adaptado a nuevas situaciones.

Clasificación de los modelos matemáticos

Según la filosofía con la que abordemos el mundo que nos rodea, así será el tipo de modelo matemático que podemos construir.

En concreto podemos clasificarlos en:

Modelos deterministas: Son aquellos que a cada valor de la variable independiente corresponde otro valor de la variable dependiente. Son especialmente ´útiles en los sistemas que evolucionan con el tiempo, como son los sistemas dinámicos. En ellos podemos conocer el estado del sistema transcurrido cierto tiempo una vez que hemos dado valores a los distintos pares ‘metros que aparecen en el modelo.

Los modelos continuos son útiles cuando tratamos de estudiar procesos en los que se observa continuidad en el tiempo y en este caso lo adecuado es hacer uso de las ecuaciones diferenciales.

Sin embargo, al estudiar algunos modelos, como son la dinámica de las poblaciones, puede apreciarse que se trata de un proceso discreto. Ahora, las ecuaciones en diferencias nos ofrecen muchas posibilidades para deducir como cambian las propiedades del sistema al variar los parámetros del modelo.

En concreto, las matemáticas utilizadas para la evaluación de los modelos deterministas son:

- Ecuaciones en diferencias.
- Teoría de bifurcaciones.
- Ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales).
- Análisis numérico.

Modelos probabilísticos: Si en un modelo determinista, como por ejemplo el logístico y 0 (t) = ry(t) (1 − y(t)/k), el parámetro r varía aleatoriamente, lo que hacemos es sustituir valores constantes por otros que cambian con cierta probabilidad. En este caso estamos ante un modelo probabilístico.

Por ejemplo:

• Procesos estocásticos

Modelos mixtos:

• **Ecuaciones diferenciales estocásticas.** Modelos discretos matriciales: Son los más frecuentes cuando el sistema que estamos modelando está dividido en una serie de clases. En un momento dado, el estado del sistema puede representarse por un vector. El paso de una etapa a otra se realiza a través de una matriz conocida con el nombre de matriz de transición.

- Cadenas de Márkov.
- Modelos de Leslie.
- Modelos de Lefkovitch.

De una manera muy general, y desde el punto de vista de la Biología, podemos clasificar los modelos matemáticos en los siguientes grupos:

- Modelos en bioquímica.
- Modelos de la evolución de una población.
- Modelos en fisiología (de animales, de plantas).
- Modelos en la genética.
- Modelos en la creación de patrones.
- Modelos en la epidemiología.
- Modelos en las migraciones.

CLASIFICACIÓN DE LAS EDO:

Existen muchos tipos de ecuaciones diferenciales, y se las clasifica en diferentes categorías en función de sus propiedades.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias o (EDO) son ecuaciones donde las derivadas se toman con respecto a una sola variable. Solo hay una variable independiente.

Las ecuaciones diferenciales parciales o (EDP) son ecuaciones que dependen de derivadas parciales de varias variables. Es decir, hay varias variables independientes.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$\frac{dy}{dt} = ky$ Exponential growth

$\frac{dy}{dt} = k(A - y)$ Newton law of cooling

$m = \frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ Mechanical vibrations

Y de ecuaciones diferenciales parciales:

$\frac{ay}{at} + c\frac{ay}{ax} = 0$ transport equation

$\frac{au}{at} = \frac{a^2u}{ax^2}$ heat equation

$\frac{a^2u}{at^2} = \frac{a^2u}{ax^2} + \frac{a^2u}{ay^2}$ wave equation in 2 dimensions

Si hay varias ecuaciones trabajando juntas, se tiene un llamado sistema de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo,

$$y' = x, \quad x' = y$$

es un sistema sencillo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones de Maxwell para electromagnética, es un sistema sencillo de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Las ecuaciones de Maxwell para electromagnética,

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho, \quad \nabla\times\vec{E} = -\partial\vec{B}\,\partial t, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \partial\vec{D}\,\partial t,$$

son un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. El operador de divergencia$\nabla\cdot\nabla\cdot$ y el operador curl $\nabla\times$ pueden escribirse en derivadas parciales de las funciones involucradas en las z variables x y, y. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

El siguiente bit de información es el orden de la ecuación (o sistema). El orden es simplemente el orden del derivado más grande que aparece. Si la derivada más alta que aparece es la primera derivada, la ecuación es de primer orden. Si la derivada más alta que aparece es la segunda derivada, entonces la ecuación es de segundo orden. Por ejemplo, la ley de Newton de enfriamiento anterior es una ecuación de primer orden, mientras que la ecuación de vibraciones mecánicas es una ecuación de segundo orden. La ecuación que rige las vibraciones transversales en una viga,

$$a^4 \frac{a^4 y}{a x^4} + c \frac{a^2 y}{a t^2} = 0$$

es una ecuación diferencial parcial de cuarto orden. Es de cuarto orden ya que al menos una derivada es la cuarta derivada. No importa que la derivada int sea sólo de segundo orden.

En el primer capítulo, comenzaremos a atacar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es decir, ecuaciones de la forma dy/dx=f(x, y). En general, las ecuaciones de orden inferior son más fáciles de trabajar y tienen un comportamiento más sencillo, por lo que comenzamos con ellas.

También distinguimos cómo aparecen las variables dependientes en la ecuación (o sistema). En particular, decimos que una ecuación es *lineal* si la variable dependiente (o variables) y sus derivadas aparecen linealmente, es decir sólo como primeras potencias, no se multiplican juntas, y no aparecen otras funciones de las variables dependientes. Es decir, la ecuación es una suma de términos, donde cada término es alguna función de las variables independientes o alguna función de las variables independientes multiplicada por una variable dependiente o su derivada. De lo contrario, la ecuación se llama no lineal. Por ejemplo, una ecuación diferencial ordinaria es lineal si se puede poner en la forma

$$an\,(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + an - 1(x) \frac{dn - 1y}{dxn - 1}$$

$$a1(x) \frac{dy}{dx} + a0(x)y = b(x)$$

Las funciones a 00, a 11, an se llaman los *coeficientes*. Se permite que la ecuación dependa arbitrariamente de la variable independiente. Así que

$$e_{x}\frac{d^2y}{dx^2}+sin(x)\frac{dy}{dx}+x^2y=1$$

sigue siendo una ecuación lineal como y, y sus derivadas sólo aparecen linealmente.

Todas las ecuaciones y sistemas anteriores como ejemplos son lineales. Puede que no sea inmediatamente obvio para las ecuaciones de Maxwell a menos que escribas la divergencia y el rizo en términos de derivadas parciales. Veamos algunas ecuaciones no lineales. Por ejemplo:

$$\frac{ay}{at}+y\frac{ay}{ax}=v\frac{a^2y}{ax^2}$$

es una ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden. Es no lineal porque y x se multiplican entre sí. La ecuación

$$\frac{dx}{dt}=x^2$$

es una ecuación diferencial de primer orden no lineal ya que hay una segunda potencia de la variable dependiente x.

Una ecuación lineal también puede llamarse *homogénea* si todos los términos dependen de la variable dependiente. Es decir, si ningún término es una función solo de las variables independientes. De lo contrario, la ecuación se denomina *homogénea o no homogénea.* Por ejemplo, la ecuación de crecimiento exponencial, la ecuación de onda o la ecuación de transporte anterior son homogéneas. La ecuación de vibraciones mecánicas anterior no es homogénea siempre y cuando not (t) sea la función cero. Del mismo modo, si la temperatura ambiente, A es distinta de cero, la ley de enfriamiento de Newton no es homogénea. Una ODE lineal homogénea se puede poner en la forma.

La clasificación de manera general sería:

- ✓ **DE ACUERDO CON EL ORDEN DE LA EDO**

Las EDOs tienen como característica que uno o varios de sus términos son funciones derivadas (o razones de cambio). La forma general de representación de una EDO puede representarse:

$$f\left(x, y, y', y'', \dots \dots, y^{(n)}\right) \tag{8}$$

El orden de la EDO se establece mediante el índice de la derivada más alta de la variable dependiente. Por ejemplo:

$$y'' = y' + yx + 2x \tag{9}$$

La EDO mostrada en la ecuación (9) se trata de una EDO de segundo orden, ya que el término y'' indica que tiene una segunda derivada.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x - 2y \tag{10}$$

La expresión (10) se trata de una EDP de primer orden, ya que el término $\frac{\partial u}{\partial x}$ ó $\frac{\partial u}{\partial y}$ establece que la razón de cambio es una primera derivada. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

- ✓ **DE ACUERDO CON EL GRADO DE LA EDO**

Gran cantidad de expresiones matemáticas poseen variables elevadas a una potencia, sea esta la variable independiente o dependiente, sin embargo, para determinar el grado de la EDO se debe analizar la mayor potencia de la variable dependiente, por ejemplo, la expresión:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - u(1 - x^2) + \frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{11}$$

La ecuación (11) se trata de una EDO (ya que solamente tiene una variable dependiente "x" y una sola variable independiente "t"), luego se trata de una EDO de segundo orden y por último es una EDO de segundo grado, debido a que la variable DEPENDIENTE posee una potencia cuadrática.

La expresión (11) anterior corresponde a la ecuación diferencial denominada: "Oscilador No lineal de Van del Pol con amortiguamiento".

✓ **DE ACUERDO CON LA LINEALIDAD DE LA EDO:**

Para que una EDO sea considerada como lineal debe cumplir los siguientes requisitos:

- La variable dependiente o cualquiera de sus derivadas (razones de cambio) deben ser de grado uno.
- Los coeficientes o variables que acompañen a la variable dependiente y (o sus derivadas) deben ser solamente funciones de la variable independiente x, es decir, si existen multiplicaciones o divisiones de la misma variable dependiente, no cumplirá con el requisito de linealidad.

$$y''' = y' + xy \tag{12}$$

La expresión (12) corresponde a una EDO LINEAL: ya que la variable dependiente y (en su forma básica y derivadas) tienen grado 1, por último, la variable independiente x está multiplicando a la variable y sin afectar su linealidad

$$y^2 = yy' + xy \tag{13}$$

La expresión (13) se trata de una EDO NO LINEAL: ya que la variable dependiente y en el lado izquierdo tiene potencia cuadrática, en el lado derecho existe una multiplicación de la misma variable dependiente en la forma yy', por lo tanto, no cumple con los requisitos de linealidad.

$$(x^2 + 3y)\sin(x) - y' \, cos(x) = 0 \tag{14}$$

La expresión (14) se muestra como una EDO LINEAL: ya que la variable dependiente y (en su forma básica y derivadas) tienen grado 1, las funciones trigonométricas que multiplican a la variable dependiente no afectan su linealidad.

$$y'' = \sin(y) + e^y \tag{15}$$

La expresión (15) se trata de una EDO NO LINEAL: ya que la variable dependiente y en el lado derecho se ve afectada en su linealidad debido a la función trigonométrica seno y la función exponencial.

Aquellas ecuaciones diferenciales que no cumplan con los mencionados requisitos serán consideradas como *no lineales.*

TIPOS DE SOLUCIONES EN PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES:

Encontrar una *solución* es encontrar el valor numérico de la incógnita de tal manera que al sustituirla en la misma ecuación se mantenga la igualdad. Así que, para resolver una ecuación se puede despejar la incógnita utilizando las propiedades de igualdad.

En el caso específico de las EDO se puede considerar los siguientes conceptos:

Se denomina *solución de una EDO* a una función $y = f(x)$ con sus respectivas derivadas que satisfagan las condiciones de la ecuación, de esta manera, al reemplazar la función y sus derivadas en cada término se logre obtener una igualdad, todo esto dentro de un intervalo $[a, b]$ establecido.

Al hablar de modelos matemáticos representados por EDOs, es lógico pensar que lo que se busca es una *solución* ya sea numérica o en forma de otra ecuación resuelta, ya que estas expresiones simbolizan fenómenos físicos reales. (García A., 2014)

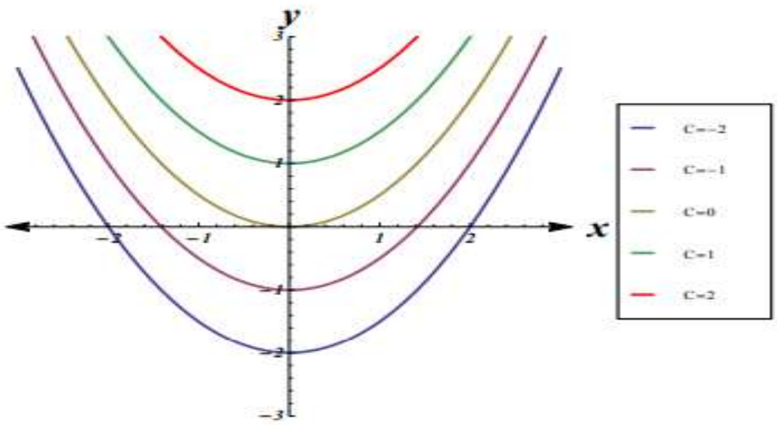
Una de las características de las EDOs, es que en ocasiones existirán respuestas analíticas, en otros casos solamente soluciones numéricas, también pueden existir una o varias soluciones, es por ello que en primer lugar se necesita establecer el tipo de solución se requiere, entre las formas principales de soluciones se encuentran:

SOLUCIÓN GENERAL: al determinar la respuesta de una EDO se encuentra una *familia de curvas* que todas satisfacen la ecuación diferencial, generalmente en la aplicación de la integración numérica se establecerá el coeficiente *C* que representa la constante de integración como un valor numérico que no está determinado.

Por ejemplo $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ es solución (2-paramétricas) denominadas soluciones generales de la ecuación diferencial ordinaria y −y −2y = 0 para C1 y C2 constantes arbitrarias.

La familia de curvas solución y = $\frac{x^2}{2}$ +C es una solución 1-paramétrica (solución general) de la ecuación diferencial y = x, las cuales se muestran en la figura 1.1 para ciertos valores de C

Figura 3. *Familia de soluciones paramétrica* $y=\frac{x^2}{2}+c$



Fuente: *Software MATHEMATICA*

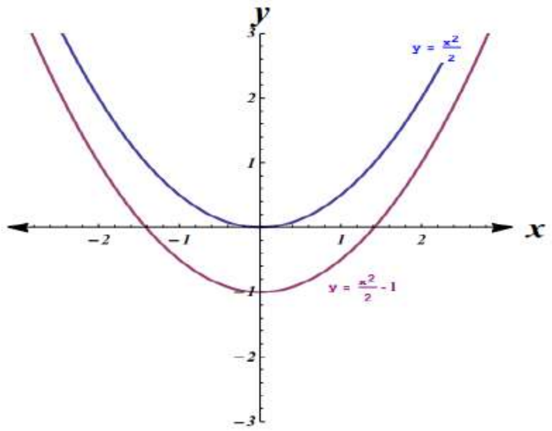
SOLUCIÓN PARTICULAR: como se determinó anteriormente, una EDO que posee condiciones iniciales se transforma en un problema de valor inicial PVI, de esta manera, al resolver la EDO se debe reemplazar el valor numérico dado para determinar la *ÚNICA SOLUCIÓN* de ese ejercicio, ya que se estará "obligando" al resultado obtenido a pasar por el punto $y(x_0) = y_0$.

SOLUCIONES SINGULARES: son aquellas soluciones que no se obtienen a partir de la solución general, sin embargo, se obtiene suministrando valores arbitrarios a las constantes.

No siempre existen; si existe, se trata de la curva llamada envolvente de la familia de curvas integrales definida por la familia n-paramétrica de soluciones.

La función $y(x) = \frac{x^2}{4}$ es una solución singular de la ecuación $(y)^2 - xy + y = 0$ en J = R, ya que satisface dicha EDO y no puede obtenerse de sustituir C por algún valor numérico de la solución general $y(x) = Cx - C^2$.

Figura 4. *Soluciones particulares de* $y = {}^{x}/_{2}$



Fuente: *propia de MATHEMATICA*

En efecto, se nota que:

$$\left\|\frac{x^2}{4}\right\| - x\left(\frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - x\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{4}\right)$$

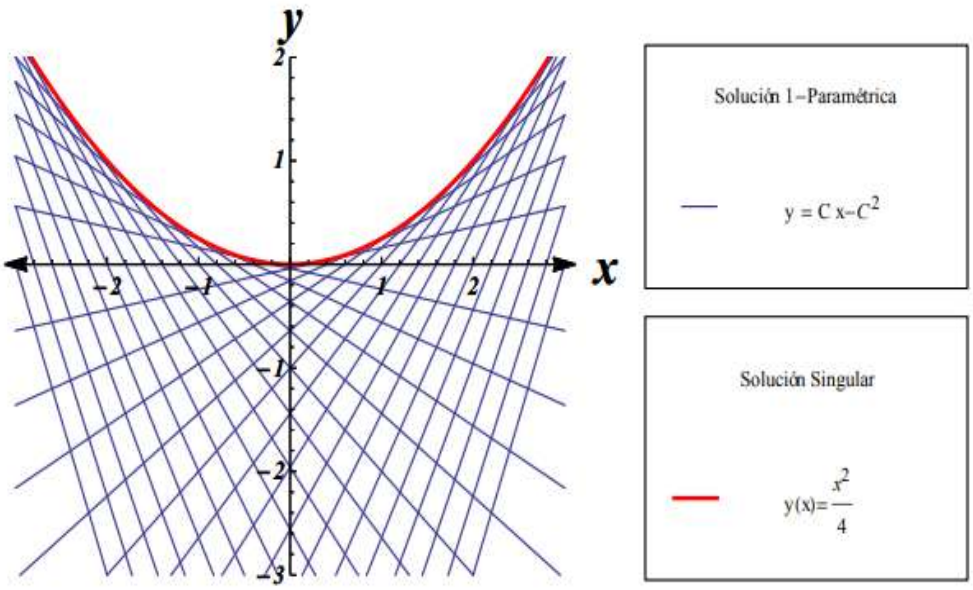
$$= \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

$$= -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = 0$$

Por otro lado, al igualar $y(x) = Cx - C^2$ con $y(x) = \frac{x^2}{4}$ para encontrar un C en común, se determina que $Cx - C\ 2 = \frac{x^2}{4} \Longleftrightarrow 0 = x\ 2 - 4Cx + C^2$. Sin embargo, al cambiar C por cualquier valor numérico se determina que x debe ser fija, lo cual contradice el hecho de que x es variable. $y(x) = x\ 2\ 4$ es envolvente de las curvas solución de la familia 1-paramétrica $y(x) = Cx - C^2$.

La relación $x^2 + y^2 = 1$ es una solución singular de la ecuación $y = xy + \sqrt{1 + (y)^2}$, ya que satisface dicha EDO y no puede obtenerse de sustituir C por algún valor numérico de la solución general $y(x) = x\,C + \sqrt{1 + c^2}$. En efecto, note que al derivar implícitamente y con respecto a x se obtiene $2x+2yy = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{-x}{y}$. Luego al sustituir este resultado en la ecuación diferencial se verifica que

Figura 5. *Solución singular y(x) =*$\frac{x^2}{4}$



Fuente: *propia de MATHEMATICAS*

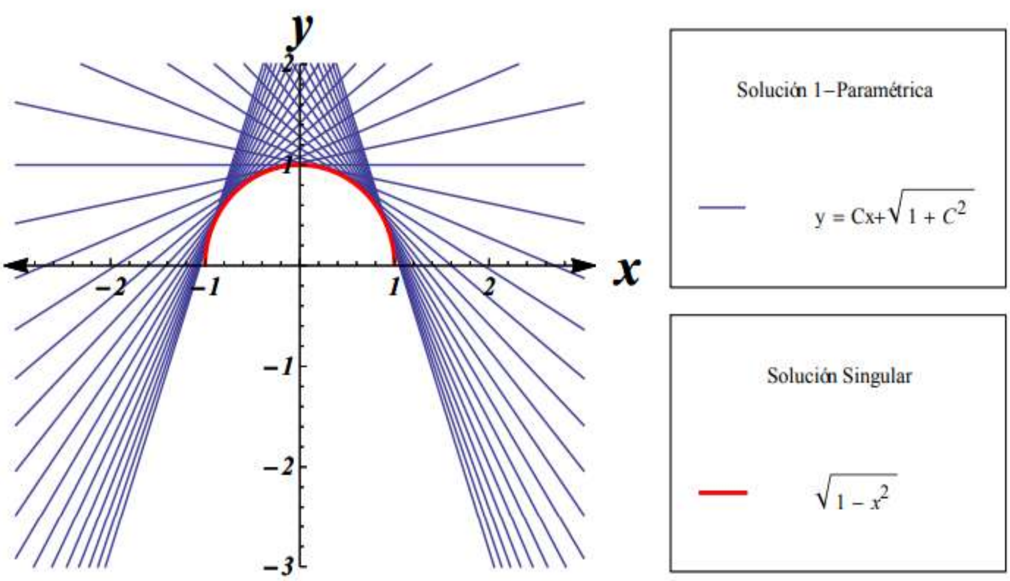
Figura 6. *Solución singular $x^2+y^2=1$*

$$
\begin{aligned}
y = x\left(\frac{-x}{y}\right) + \sqrt{1+\left(\frac{-x}{y}\right)^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \sqrt{\frac{1}{y^2}} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \frac{1}{\sqrt{y^2}}; \qquad y > 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2}{y} + \frac{1}{y} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{-x^2+1}{y} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = \frac{y^2}{y} \\
&\Longleftrightarrow \quad y = y.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, al sustituir $y(x) = xC + \sqrt{1+C^2}$ en $x^2+y^2=1$ para encontrar un C en común, se determina que

$$
\begin{aligned}
x^2 + (xC + \sqrt{1+C^2})^2 = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (xC + \sqrt{1+C^2})^2 = 1 - x^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2C^2 + 2xC\sqrt{1+C^2} + 1 + C^2 = 1 - x^2.
\end{aligned}
$$

Sin embargo, al cambiar C por cualquier valor numérico se determina que x debe ser fija, lo cual contradice el hecho de que x es variable. En la figura 1.4 se muestra como $y = \sqrt{1-x^2}$ es envolvente de la familia 1-paramétrica $y(x) = C.x + \sqrt{1+C^2}$.



Fuente: *propia de MATHEMATICAS*

EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS: Las soluciones *explícitas* de las EDO son aquellas en las cuales por algún método de resolución (analítico o teórico) se ha encontrado una solución (general, particular, general) dentro del intervalo dado. Por otro lado, una solución *implícita* es aquella en la cual se pueden encontrar más de una solución explícita en el intervalo dado.

SOLUCIÓN TOTAL DE UNA EDO ORDEN n: es la que contiene todas las soluciones de la ecuación. Está formada por la solución general y las soluciones singulares en caso de que hallan o se puedan determinar. (García A., 2014)

Por lo general para efectos prácticos cuando se resuelve una ecuación diferencial, suponemos están las funciones y derivadas de ella bien definidas para evitar analizar casos de donde se puede desprender algunas soluciones singulares, con ello, se pide solo solución general y no total.

La gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina curva integral de la ecuación diferencial.

Estudiar los distintos tipos de soluciones que admite la ecuación diferencial y = √ y.

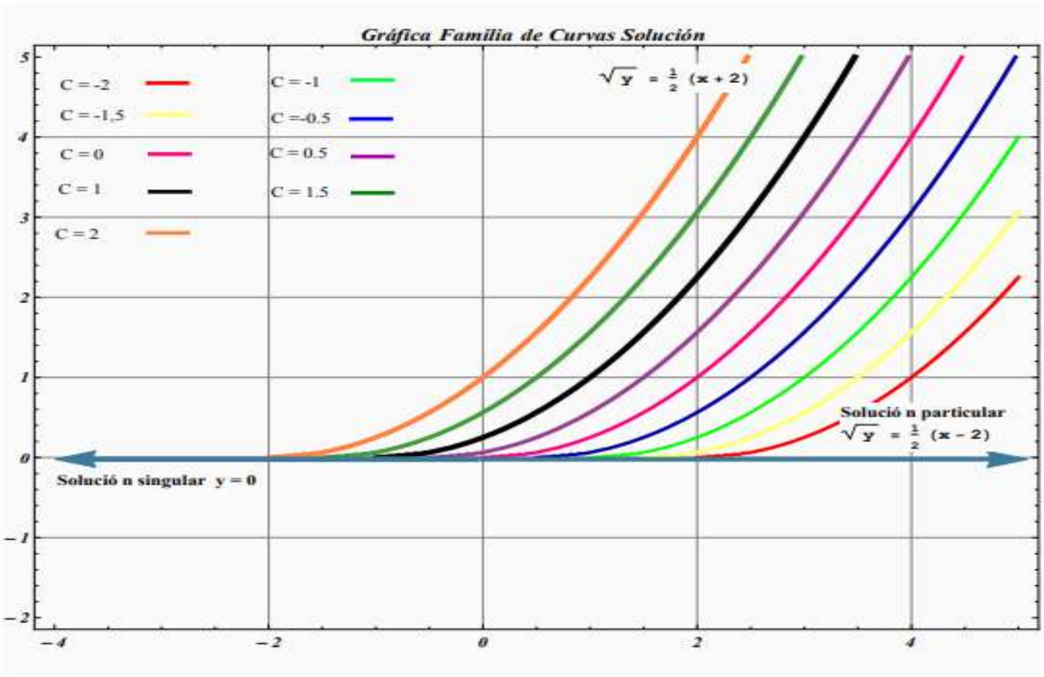
Esta ecuación es sencilla de resolver por el método de variables separables que se verá más adelante en apartado de métodos de resolución para EDO1. Por ahora se admite como la solución general $\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x+C)$, la cual representa una familia de funciones definidas en $[-C,+\infty[$. De donde dando valores a C se obtiene soluciones particulares. Por ejemplo, para C = 0 se obtiene la solución.

particular $\sqrt{y} = \frac{x}{2}$ definida en $[0, +\infty[$. Observe que la función y = 0 también es solución de esta ecuación diferencial ya que la verifica o satisface; sin embargo, no está incluida en la solución general que hemos obtenido. Se trata de una solución singular.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que la Solución Total de la ecuación diferencial y (x) = p y(x) está dada por q

$\sqrt{y(x)} = \frac{x+c}{2}$,C ∈ R: Solución general; y = 0: Solución singular.

Figura 7. *Familia de curvas solución general y 0 (x) = p y(x).*



Fuente: *propia de MATHEMATICAS*

CAPÍTULO I

RESOLUCIONES ANALÍTICAS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Para establecer la "solución analítica" a un problema matemático (teórico o profesional) se debe primeramente comprender el comportamiento de las variables que gobiernan el sistema analizado y la relación que existen entre ellas, de esta manera, cuando sea posible la resolución analítica de un problema de EDO se deberá incluir la resolución en forma de ecuación. Es muy común en el desarrollo de ejercicios de derivación e integración encontrar como respuesta ecuaciones que relacionen variables; de la misma manera, en ejercicios de EDO existen soluciones que pueden ser ecuaciones (incluyendo la constante de integración y proporcionalidad). Si el ejercicio no proporciona información inicial ("problema de valor inicial"), se podrá determinar una familia de soluciones para cada ejercicio. (García A., 2014)

La teoría fundamental de ecuaciones diferenciales ordinarias señala que la forma básica de esta expresión matemática incluye una *GRADIENTE O RAZÓN DE CAMBIO*, es decir, se incluye una diferencial en ella, para que una ecuación sea diferenciable debe cumplir todos los requisitos de continuidad de funciones, por lo tanto, la solución analítica de un problema de EDO también se la puede establecer somo la *solución continua*.

De la misma manera, en el desarrollo de la resolución analítica de los distintos tipos de EDOs en algún momento se requiere solventar mediante integración numérica. Se conoce de antemano que al integrar una función se obtiene como resultado "al área bajo la curva", siendo posible obtener valores numéricos positivos, negativos o incluso cero (utilizando sumatorias de Riemann), es decir, la solución analítica de una EDO también puede ser considerada la *solución exacta.*

Uno de los inconvenientes que surgen en el desarrollo de las EDO, es que no siempre se logará encontrar una solución analítica, ya sea porque la ecuación matemática es demasiado compleja para resolverla, o porque la relación de variables no permite obtener una solución en forma de ecuación.

1. Clasificación de EDOs por el tipo de resolución

Como se determinó anteriormente, las EDO son ecuaciones que relacionan las variables que gobiernan a un sistema físico real, además cumplen con el requisito que uno de sus términos es una derivada o varias derivadas respecto a una sola variable independiente, por ejemplo:

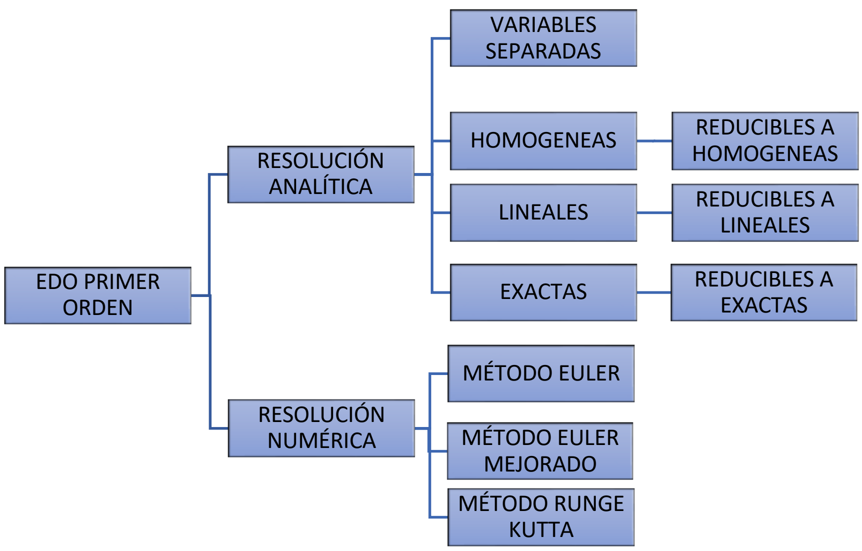
Ley de Kirchoff de circuitos eléctricos:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{c}i=E(t) \qquad (1\text{-}1)$$

En la ecuación (1-1) se evidencia que la variable dependiente es *t* (tiempo), mientras que la variable dependiente i (intensidad de corriente) en algunos términos se considera la derivada respecto a t. Por lo tanto, al tener solamente una variable independiente, se puede establecer a la misma como una ecuación diferencial de segundo orden, para su resolución se debe utilizar algún método analítico o numérico (o mediante ambos métodos). El presente texto se centra en la resolución de EDO de primer orden. (García A., 2014)

Las ecuaciones diferenciales se pueden agrupar de acuerdo con el tipo de resolución que se requiera utilizar en ellas, la clasificación general es la siguiente:

Figura 8. *Resoluciones de EDO de primer orden.*



De acuerdo con la configuración de la EDO (relaciones entre variables), se pueden obtener soluciones analíticas implícitas o explícitas; para cada tipo de EDO existirá una secuencia de pasos necesarios para su resolución.

1.1 Resolución de EDOs de primer orden por variables separables

En las EDO de primer orden, algún término corresponde a una razón de cambio que relaciona la variable dependiente e independiente, generalmente la variable dependiente se la designa con la letra *y,* mientras que la variable independiente se la designa con la letra *x,* la relación de variables en la diferencial se la puede determinar cómo:

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{1-2}$$

En la ecuación (1-2) se ha propuesto la notación de Leibniz, el objetivo fundamental es: los dos lados de la ecuación deben tener términos INTEGRABLES, de esta manera, al separar en variables los dos términos de la EDO se pueden encontrar soluciones. (Moya, L.; Rojas, E., 2020)

Procedimiento de resolución:

a) Identificar que se trate de una EDO de primer orden.

$$f(y)y' = g(x) \tag{1-3}$$

b) En base a la ecuación (1-3) desarrollar la razón de cambio de tal manera que se pueda identificar la variable dependiente e independiente.

$$f(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

c) Al utilizar la razón de cambio en forma diferencial, se podrá *separar* (cuando los términos lo permitan) por un lado de la ecuación la variable dependiente y en el otro lado de la ecuación la variable independiente.

$$f(y) \cdot dy = f(x)\, dx$$

d) Integrar ambos lados de la ecuación

$$\int f(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

e) Encontrar la solución del ejercicio con la inclusión o no de la constante *C*, siendo *C* el valor numérico de la constante de integración (si se trata de una EDO sin condiciones iniciales, la letra *C* deberá estar presente estableciendo que las soluciones corresponden a una *familia de curvas,* mientras que en un PVI se podrá obtener la resolución en forma de ecuación sin el valor de *C*)

$$F(y) = F(x) + C$$

EJEMPLO 1.

- ***Dada la ecuación diferencial:*** $\boldsymbol{y' = e^{6x} + 20senx}$***, hallar la solución particular si tenemos la condición inicial*** $\boldsymbol{y(0) = 5}$**.**

Solución:

a) Se escribe la ecuación diferencial aplicando la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = e^{6x} + 20senx \qquad (1\text{-}4)$$

b) Se realiza la separación de las variables de la ecuación (1-4)

$$dy = (e^{6x} + 20senx)dx$$

c) Para obtener la resolución de *y*, se debe integrar ambos lados de la ecuación:

$$\int dy = \int (e^{6x} + 20senx)dx$$

$$\int dy = \int e^{6x}\, dx + 20 \int senxdx$$

d) Luego del proceso de integración se obtiene la solución general

$$y = \frac{e^{6x}}{6} - 20cosx + C$$

e) Para la obtención de *solución particular*, se aplica la condición inicial $\mathrm{y}(0) = 5$, reemplazando este valor en la solución general, para encontrar el valor de la constante de integración C. (Moya, L.; Rojas, E., 2020)

$$y(0) = \frac{e^{6(0)}}{6} - 20\cos(0) + C$$

$$5 = \frac{1}{6} - 20 + C$$

$$5 = \frac{1 - 120}{6} + C$$

$$C = \frac{149}{6}$$

La solución particular al reemplazar el valor de C en la solución general puede expresarse como se presenta a continuación:

$$y = \frac{e^{6x}}{6} - 20cosx + \frac{149}{6}$$

EJEMPLO 2

- ***Dada la ecuación diferencial ordinaria:***

$$dy(3xy - x + 3y - 1) - dx(2xy + 2x - 2y - 2) = 0 \qquad (1\text{-}5)$$

Obtener la solución implícita.

Solución:

a) Reorganizando los términos de la ecuación (1-5)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2xy + 2x - 2y - 2)}{(3xy - x + 3y - 1)}$$

b) Considerando el desarrollo de las expresiones mediante factorización (factor común)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+1) - 2(y+1)}{x(3y-1) + (3y-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y+1)(2x-2)}{(3y-1)(x+1)} \tag{1-6}$$

c) En base a la expresión (1-6), se identifica que los términos encontrados se pueden separar de acuerdo con las variables en la forma $f(x), g(x)$. Por lo tanto, realizando el despeje:

$$\frac{(3y-1)\,dy}{(y+1)} = \frac{(2x-2)dx}{(x+1)}$$

d) Integrando ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{(3y-1)\,dy}{(y+1)} = \int \frac{(2x-2)dx}{(x+1)}$$

e) Aplicando el método de resolución de integrales denominado "Regla de sustitución"

$$3(y+1) - 4\ln(y+1) = 2(x+1) - 4\ln(x+1) + C \tag{1-7}$$

Por lo tanto, la expresión (1-7) representa la solución implícita de la ecuación diferencial.

EJEMPLO 3

- ***Encontrar la solución general de:***

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y} \text{ y} \tag{1-8}$$

determinar la solución particular para la cual

y = 4 cuando x = −3.

Solución:

a) Separando las variables y los términos, se puede escribir la ecuación (1-8)

$$(2-y)dy = (x^2+1)dx$$

b) Luego integrando los lados de la ecuación anterior se obtiene fácilmente la solución general de la siguiente forma

$$\int(2-y)dy = \int(x^2+1)dx.$$

$$2y - \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + c \qquad (1\text{-}9)$$

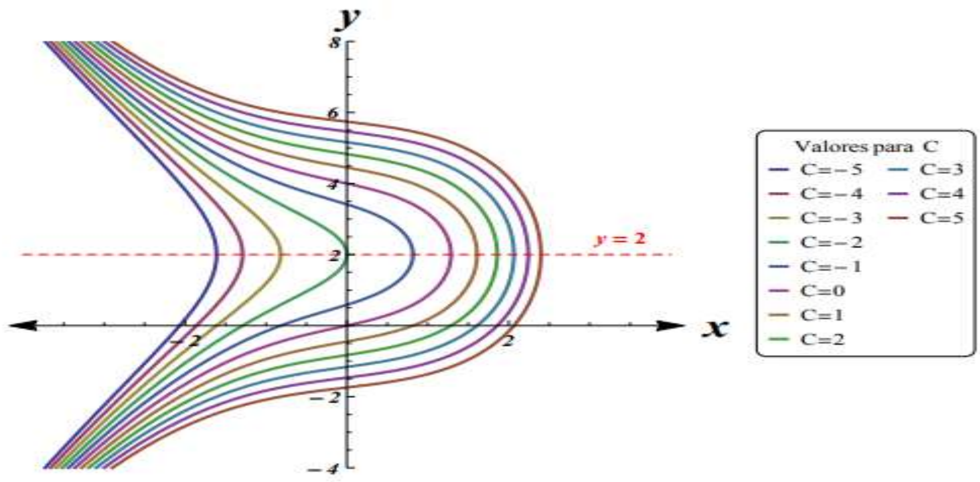
c) Posteriormente, sustituyendo x = −3 y y = 4 en (1-9) se obtiene C = 12, por lo que la solución particular requerida es

$$\frac{-x^3}{3} - x + 2y - \frac{y^2}{2} = -12.$$

Se debe notar que, para llegar a la solución general de la EDO del ejemplo anterior, se debe considerar que las curvas solución son:

$$\frac{-x^3}{3} - x + 2y - \frac{y^2}{2} = \mathrm{C}$$

Figura 9. *Algunas soluciones de la EDO* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+1}{2-y}$*, algunas constantes C*



Fuente: *propia de MATHEMATICA*

Ejercicios Propuestos

Mediante el método de resolución por variables separables, encuentre la respuesta singular o general según corresponda:

1) $y' = 2tye^{-2t} + 5ty \qquad y(0) = 1$

2) $e^{y' - \frac{1}{x}} = x \qquad y(1) = 1$

3) $\dfrac{dy}{y^2\sqrt{3+t^2} + \frac{\sqrt{3+t^2}}{2}} = dt$

4) $\dfrac{1^{(\sqrt{y}+1)}y' - 3}{2} = e^{x+1} \qquad y(1) = 1$

5) $y' = \cos^2 yx^2 + 2\cos^2 yx + 3\cos^2 y \qquad y(0) = 0$

1.2 Resolución de EDOs de primer orden homogéneas y reducibles a homogéneas:

1.2.1 Requisitos de EDOs homogéneas

Para que una considere a una EDO homogénea debe cumplir los siguientes requisitos:

- Cada término de la EDO en forma de diferencial debe tener el mismo grado.
- Al multiplicar la expresión λ en cada variable, se transforma en una ecuación equivalente (homogénea grado cero) (Moya, L.; Rojas, E., 2020)

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \ \ para\ todo\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{1-10}$$

Otra forma de anunciar una EDO es la denominada *diferencial total,* que tiene la forma:

$$M(x, y)\,\mathrm{d}x + N(x, y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{1-11}$$

Esta forma de EDO es homogénea si *M* y *N* son homogéneas del mismo grado.

El método de resolución de EDOs homogéneas implica realizar un cambio de variable de la forma:

$$y = \mu x \tag{1-12}$$

$$x = vy \tag{1-13}$$

Se puede utilizar las ecuaciones (1-10) o (1-11) a conveniencia de la resolución, ya que luego al realizar el cambio de variable en la EDO original, esta se transformará en un ejercicio de variables separables.

Por ejemplo: La ecuación diferencial y = $\frac{2x+3y}{x-y}$ es homogénea de grado cero pues,

$$\text{f(tx,ty)} = \frac{2tx+3ty}{tx-ty} = \frac{t(2x+3y)}{t(x-y)} = t\left(\frac{2x+3y}{x-y}\right) = \frac{2x+3y}{x-y} = f(x,y).$$

Una EDO de primer orden es homogénea si tiene la forma o la forma$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$.

En estas se cumple que tanto $F\left(\frac{y}{x}\right)$ como son funciones homogéneas y de grado cero.

Si la ecuación diferencial de primer orden y = f(x, y) es homogénea, entonces el cambio de variable u = $\left(\frac{y}{x}\right)$ o equivalentemente y = u·x la reduce a una ecuación diferencial en variables separables.

Al hacer la sustitución $y = ux \Rightarrow y_o = xu_o + u$ la ecuación diferencial se transforma en $xu_o + u$ =f(x,y), luego como f(x, y) es homogénea de grado cero tenemos que:

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}$$

la cual es una ecuación en variable separable. Al final del proceso de integración, se recuperan las variables x e y con base en la sustitución $y = ux$.

1.2.2 EDOs reducibles a homogéneas (rectas intersecantes)

Una EDO se considera reducible a homogénea si tiene la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1-14}$$

Donde la EDO se trata de una función racional, en ella, tanto el numerador como el denominador son rectas que se **intersecan** en algún punto, si se logra determinar el punto de corte de las rectas (x_0, y_0), se logrará aplicar el método de resolución si se realiza primeramente el cambio de variable:

$$\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \tag{1-15}$$

Al realizar el cambio de variable respectivo, el ejercicio se transformará en una EDO de variables separables. (Nieto, H., 2004)

1.2.3 EDOs reducibles a homogéneas (rectas paralelas)

Una EDO se considera reducible a homogénea si tiene la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{1-16}$$

Donde la EDO se trata de una función racional, en ella, tanto el numerador como el denominador son **rectas paralelas** (tienen la misma pendiente), se logrará aplicar el método de resolución si se realiza primeramente el cambio de variable:

$$\mu = ax + by \tag{1-17}$$

Al realizar el cambio de variable respectivo, el ejercicio se transformará en una EDO de variables separables.

EJEMPLO 1

➢ ***Obtener la solución implícita de la siguiente ecuación diferencial.***

$$xdy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx \tag{1-18}$$

Solución:

a) Confirmar que se trate de una EDO homogénea o reducible a homogénea:

De acuerdo con la expresión (1-15), para ser una EDO homogénea los términos de la diferencial total deben tener el mismo grado. Ordenando los términos

$$xdy = (\sqrt{x^2 + y^2} + y)\,dx \tag{1-19}$$

El lado izquierdo de la expresión (1-17) correspondiente a *N* que posee grado 1; de la misma manera, el lado derecho de la expresión corresponde a *M* posee grado 1 (la variable dependiente *y* está elevada al cuadrado y raíz cuadrada), por lo tanto, se trata de una EDO homogénea.

b) Se desarrolla algebraicamente hasta obtener una expresión de la forma: $y' = f(x, y)$:

$$dy - \frac{y}{x}\,dx = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}dx$$

c) Despejando dy:

$$dy = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}dx + \frac{y}{x}\,dx$$

d) Reorganizando la expresión:

$$dy = \left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \tag{1-20}$$

e) Al obtener la expresión necesaria, se procede a realizar el reemplazo de variable en base a la ecuación (1-18)

$$u = \frac{y}{x}$$

Derivando la expresión respecto a *dx*

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \tag{1-21}$$

f) Reemplazando (1-19) en (1-18)

$$u + x\frac{du}{dx} = \sqrt{1 + u^2} + u \tag{1-22}$$

g) Simplificamos, se comprueba que el ejercicio se transforma en uno a resolverse por separación de variables:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$$

h) Integrando ambos lados de la ecuación (desarrollando y simplificando algunos términos)

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\sqrt{1 + u^2} + u = x + e^c$$

i) Regresando a los valores originales de las variables x e y:

$$\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} = x + e^c \tag{1-23}$$

j) Al despejar la expresión (1-21), se obtiene la solución general implícita:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y = x^2 + xe^c$$

EJEMPLO 2

➢ ***Dada la siguiente ecuación diferencial ordinaria***

$$(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0 \tag{1-24}$$

Hallar la solución general.

Solución:

$$M(x, y) = x^3 + y^3 \qquad N(x, y) = -xy^2$$

a) Confirmar que se trate de una EDO homogénea o reducible a homogénea:

Al comprobar la homogeneidad de los términos *M* y *N* de la ecuación, se puede verificar que es homogénea de grado 3.

b) Se realiza la sustitución o cambio de variable de acuerdo con (1-10) y (1-19)

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$dy = xdu + udx \tag{1-25}$$

c) Reemplazando (1-23) en (1-22), luego desarrollando las expresiones

$$[x^3 + (ux)^3]dx - x(ux)^2(xdu + udx) = 0$$

$$[x^3 + (x^3u^3)]dx - x^3u^2(xdu + udx) = 0$$

$$x^3(1 + u^{3)}dx - x^3u^2(xdu + udx) = 0$$

$$(1 + u^{3)}dx - u^2(xdu + udx) = 0$$

$$dx + u^3dx - xu^2du - u^3dx = 0$$

$$dx = xu^2du \tag{1-26}$$

d) La expresión (1-24) se identifica claramente que se puede complementar en su resolución mediante el método de variables separables:

$$\frac{dx}{x} = u^2du$$

e) Integrando ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dx}{x} = \int u^2 du$$

$$\ln|x| + \ln|c| = \frac{u^3}{3}$$

$$u^3 = 3\ln|cx|$$

f) Para obtener la solución se debe regresar a las variables originales por medio de la sustitución (1-10) (Nieto, H., 2004)

$$\frac{y^3}{x^3} = 3\ln|cx| \tag{1-27}$$

g) La solución general es:

$$y = x\sqrt[3]{3\ln|cx|}$$

Ejercicios Propuestos

Verifique si se tratan de EDOs homogéneas, según corresponda utilice el método de resolución correspondiente para encontrar la respuesta singular o general.

1) $(2x^2 + 3y^2) = -5xyy'$
2) $\left(y' - \frac{y}{x}\right)(3x - 2y) = x + 4y$
3) $x\left(y' - \frac{y}{x}\right) = x + xe^{y/x}$
4) $\left(1 - sen^2\frac{y}{x}\right)\left(y' - \frac{y}{x}\right) = Sen\left(\frac{y}{x}\right)$
5) $y' = \frac{x+y+1}{x-y+2}$

1.3 Resolución de EDOs de primer orden lineales y reducibles a lineales

Como se determinó anteriormente, una EDO lineal será aquella en la cual todos los términos de la variable dependiente tendrán grado 1, luego, también deberá cumplir el requisito que cada uno de los coeficientes de la expresión deberán ser funciones de la variable independiente. Una forma simple de expresar una EDO lineal sería:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1-28}$$

Donde (1-26) corresponde a una expresión matemática de una EDO lineal, siendo $p(x)$, $q(x)$ funciones dependientes únicamente de la variable *x*, luego, el coeficiente de y' es igual a uno.

1.3.1 Resolución por método de factor integrante

Para la resolución de EDO lineales se requiere el cálculo de un *factor integrante* de la forma:

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx} \tag{1-29}$$

Luego, el factor integrante (1-27) multiplica cada término de la EDO lineal (1-26)

$$u(x)[y' + p(x)y] = u(x)q(x)$$

Resolviendo las operaciones matemáticas correspondientes, la nueva expresión quedaría:

$$\frac{d}{dx}[u(x)y] = u(x)q(x)$$

$$\int d[u(x)y] = \int u(x)q(x)dx$$

$$u(x)y = \int u(x)q(x)dx$$

Estableciendo de esta manera la resolución de la EDO lineal de la forma:

$$y = \frac{1}{u(x)}\int u(x)q(x)\,dx \tag{1-30}$$

EJEMPLO 1:

- ***Obtener la solución general para la siguiente ecuación diferencial:***

$$xy' - 2y = x^2 \cos(\ln(x)) \tag{1-31}$$

a) Verificación si se trata de una EDO lineal: para ello se debe determinar si cumple con la forma $y' + p(x)y = q(x)$

Al dividir a cada termino de (1-29) para x, se obtiene

$$y' - \frac{2y}{x} = xcos(\ln(x)) \tag{1-32}$$

b) Se logra verificar la expresión (1-30) cumple con la forma (1-26), por lo tanto, se puede aplicar el método de resolución de EDOs lineales por factor integrante (Nieto, H., 2004)

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Donde $p(x) = -\frac{2}{x}$

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx}$$

$$u(x) = e^{-2\ln(x)}$$

Luego de aplicar las reglas del reciproco y de logaritmos, se obtiene que el factor integrante es igual a: $u(x) = \frac{1}{x^2}$

$$u(x) = x^{-2} \tag{1-33}$$

c) Multiplicando el factor integrante $u(x)$ de la expresión (1-31) por todos los términos de la expresión (1-30) se obtiene:

$$x^{-2}y' - x^{-2}\frac{2y}{x} = x^{-2}.xcos(\ln(x)) \tag{1-34}$$

d) Desarrollando matemáticamente la expresión (1-32)

$$\int d[x^{-2}y] = \int x^{-2}xcos(\ln(x))dx$$

$$[x^{-2}y] = \int x^{-2}xcos(\ln(x))dx$$

e) De acuerdo con (1-28):

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int u(x)q(x)\,dx$$

$$y = \frac{1}{x^{-2}}\int x^{-2}xcos(\ln(x))dx$$

$$y = x^2\int \frac{1}{x^2}xcos(\ln(x))dx \tag{1-35}$$

f) Para la resolución de (1-33) se aplica la regla de sustitución en la integral, se obtiene la solución general:

$$y = x^2 \operatorname{sen}(\ln(x)) + C$$

EJEMPLO 2:

- ***Dada la ecuación diferencial ordinaria:***

$$3xy' - 12y = 3x^5\, sec^2 x \tag{1-36}$$

Hallar la solución general.

Solución:

a) Verificación si se trata de una EDO lineal: para ello se debe determinar si cumple con la forma $y' + p(x)y = q(x)$

Al dividir a cada termino de (1-34) para $3x$, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} - 4\frac{y}{x} = x^4\, sec^2\, x$$

$$y' - 4\frac{y}{x} = x^4\, sec^2\, x \tag{1-37}$$

Se puede observar que (1-35) tiene la forma de una ecuación lineal, donde:

$$p(x) = -\frac{4}{x}\ \ ,\ \ q(x) = x^4\, sec^2\, x$$

b) Como (1-35) se trata de una EDO lineal, se procede a calcular el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{-4dx}{x}}$$

$$\mu(x) = e^{-4\ln(x)}$$

$$\mu(x) = x^{-4} \tag{1-38}$$

c) Aplicando directamente la ecuación (1-28) para encontrar la solución general se obtiene:

$$y = x^4 \int x^{-4} x^4 \, sec^2 x dx$$

$$y = x^4 \int sec^2 x dx \tag{1-39}$$

d) Desarrollando la expresión (1-37) por "integración directa", la solución general es:

$$y = x^4 \tan x + C$$

1.3.2 Resolución por método de variación de parámetros

Considerando la forma general de las EDO lineales:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

El método de variación de parámetros contempla encontrar dos respuestas "parciales", que luego formarán la solución general de la EDO lineal.

La solución general de EDO por el método de variación de parámetros puede escribirse como:

$$y = y_H(x) + y_1(x) \tag{1-40}$$

Siendo $y_H(x)$ la solución de la EDO homogénea asociada, y $y_1(x)$ la solución de EDO lineal completa.

1.3.2.1 Solución de la EDO homogénea asociada

Tiene la forma:

$$y' + p(x)y = 0 \tag{1-41}$$

Desarrollando analíticamente la resolución de (1-39)

$$\frac{y'}{y} = -p(x)$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx$$

$$ln(y_H) = -\int p(x)\, dx + C$$

$$y_H = e^{-\int p(x)dx} + e^C$$

Considerando e^C el valor de la constante de integración *K*, la solución de la EDO homogénea asociada corresponde a:

$$y_H = Ke^{-\int p(x)dx} \tag{1-42}$$

1.3.2.2 Solución de la EDO lineal completa

Consiste en proponer una solución particular, donde la constante *K* sea una función de la variable *x*. Sea la EDO de la forma lineal:

$$y' + p(x)y = 0$$

a) Proponer la solución particular $y_1(x)$

$$y_1 = K(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{1-43}$$

b) Derivando la expresión (1-41)

$$y_1' = \left(k(x)\right)'\left(e^{-\int p(x)\,dx}\right) + \left(k(x)\right)\left(e^{-\int p(x)\,dx}\right)'$$

c) Simplificación de términos:

$$y_1 = y_H \int \frac{q(x)}{y_H} dx \tag{1-44}$$

La solución general de la EDO lineal corresponde a la suma de (1-40) y la expresión (1-42) por lo tanto:

$$y = Ke^{-\int p(x)dx} + Ke^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\, dx$$

Simplificando y agrupando términos semejantes:

$$y = y_H + y_H \int q(x)e^{-\int p(x)dx}\, dx \tag{1-45}$$

Ejercicios Propuestos

Verifique si se tratan de EDOs lineales o reducibles a lineales, según corresponda utilice el método de resolución correspondiente (factor integrante o variación de parámetros) para encontrar la respuesta general. (Ross, S., 1992)

1) $\frac{dy}{dx} - 3yx^2 = e^{x^3}$

2) $\frac{y'}{x} - 2y = \pi$

3) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = x^{3/2} senx$

4) $xy' - 2y + x^2 = 0$

5) $dy - \left(\frac{1}{1+e^{2x}} - y\right) dx = 0$

1.4 Resolución de EDOs de primer orden no lineales

1.4.1 Solución de EDOs No lineales reducibles a EDOs lineales (Ecuación de Bernoulli)

Estas EDOs se presentan de la forma:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{1-46}$$

Siendo $p(x)$, $q(x)$ funciones dependientes únicamente de la variable x, luego, el coeficiente de y' es igual a uno, y el valor de $n \in \mathbb{R} - \{n = 0; n = 1\}$

Procedimiento de resolución:

a) Establecer el cambio de variable

$$z = y^{1-n} \tag{1-47}$$

b) Obtener la expresión $\frac{dz}{dx}$, posterior despejar $\frac{dy}{dx}$

c) Sustituir esta expresión en la EDO lineal

d) Resolver la EDO por el método lineal.

e) Regresar a la variable original mediante la expresión $z = y^{1-n}$

EJEMPLO 1:

➢ ***Encontrar la solución general de la EDO:***

$$5x^5 \frac{dy}{dx} - 25x^5 y + \frac{25}{2} x^6 y^3 = 0 \tag{1-48}$$

Solución:

a) Para obtener la forma de EDO lineal, se busca la forma (1-26), para ello, la expresión (1-46) se divide para $5x^5$, y se reescribe

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2} xy^3 \tag{1-49}$$

b) Al identificar los términos de (1-47) se determina $n = 3$, por lo tanto se trata de una ecuación de Bernoulli de la forma (1-44), por lo tanto, el procedimiento indica realizar el cambio de variable:

$$z = y^{1-n}$$

$$z = y^{1-3}$$

$$z = y^{-2} \tag{1-50}$$

c) Se despeja la expresión (1-48):

$$y = z^{-\frac{1}{2}} \tag{1-51}$$

Derivando (1-49)

$$y' = -\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z'$$

d) Al sustituir (1-49) en (1-47)

$$-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}z' - 5z^{-\frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}x(z^{-\frac{1}{2}})^3 \tag{1-52}$$

e) Para simplificar (1-50), se multiplica por $-2z^{\frac{3}{2}}$, entonces:

$$z' + 10\,z = 5x \tag{1-53}$$

f) Se verifica entonces que (1-51) se transformó en una EDO lineal, donde

$$p(x) = 10$$

$$q(x) = 5x$$

g) Desarrollando el método de factor integrante:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$u(x) = e^{\int 10\,dx}$$

$$u(x) = e^{10x}$$

h) La resolución directa mediante (1-28) muestra:

$$z = \frac{1}{u(x)}\int u(x)\,q(x)dx + \frac{c}{u(x)}$$

$$z = \frac{1}{e^{10x}}\int e^{10x}5x\,dx + \frac{c}{e^{10x}} \tag{1-54}$$

i) Desarrollando la integral de la expresión (1-52) mediante “integración por partes” se obtiene:

$$z = e^{-10x}\,(5)\left(\frac{1}{10}xe^{10x} - \frac{1}{100}e^{10x}\right) + Ce^{-10x}$$

Despejando y simplificando:

$$z = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}$$

j) Se requiere regresar a la variable original y, al sustituir $z = y^{-2}$ mediante (1-48)

La solución general de la EDO no lineal es:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \qquad (1\text{-}55)$$

EJEMPLO 2:

- ***Encuentre la solución general y particular de la siguiente EDO, si y(1)=1:***

$$x\frac{dy}{dx} + y = y^3(1 + ln(x)) \qquad (1\text{-}54)$$

Datos: n=3 por lo tanto la EDO no es lineal

Se despeja y' de la expresión (1-54) para obtener la forma de (Ecuación de Bernoulli)

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^3(1+ln(x))}{x} \qquad (1\text{-}55)$$

Cambio de variable:

$$v = y^{1-n}\ ;\ v = y^{1-3}\ ;\ v = y^{-2}$$

El factor (1-n) y^{-n} se multiplica por cada lado de la expresión (1-55)

$$\underbrace{(1\text{-n})\, y^{-3}\frac{dy}{dx}} + \frac{y}{x}(1 - \text{n})\, y^{-3} = (1 - \text{n})\, y^{-3}\frac{y^3(1+ln(x))}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} - 2y^{-3}\frac{y}{x} = -2\frac{(1 + ln(x))}{x}$$

Se reemplaza $v = y^{-2}$ y despeja a la forma lineal.

$$\boldsymbol{v' - \frac{2v}{x} = -2\frac{(1+ln(x))}{x}} \qquad (1\text{-}56)$$

Al comprobarse que se tiene una ecuación lineal, se calcula el factor integrante

$$u(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

Donde $p(x) = -\frac{2}{x}$

$$u(x) = e^{-\int \frac{2}{x} dx}$$

$$u(x) = e^{-2\ln(x)}$$

Luego de aplicar las reglas del reciproco y de logaritmos, se obtiene que el factor integrante es igual a:

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \text{ ó } u(x) = x^{-2}$$

Se multiplica el factor integrante $u(x)$ por ambos lados de la expresión (1-56) y se obtiene:

$$x^{-2}v' - x^{-2}\frac{2v}{x} = -2x^{-2}.\frac{(1+\ln(x))}{x} \qquad (1-57)$$

$$\int d[x^{-2}v] = \int -2x^{-3}(1+\ln(x))dx$$

$$[x^{-2}v] = \int -2x^{-3}(1+\ln(x))dx$$

Se despeja *v* o se aplica la expresión (1-57):

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int u(x)q(x)\,dx$$

$$v = \frac{-2}{x^{-2}}\int -2x^{-3}(1+\ln(x))dx$$

Aplicando las reglas de integración, se obtiene:

$$v = 1 - 2x^{-3}(\ln(x)) + 2x^{-3} - 2Cx^2$$

Reemplazar $v = y^{-2}$

$$y^{-2} = 1 - 2x^{-3}(\ln(x)) + 2x^{-3} - 2Cx^2$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x^{-3}(\ln(x))+2x^{-3}-2Cx^2}}$$

R: solución general.

Cálculo de la constante C, para la solución particular:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2(1)^{-3}(\ln(1)) + 2(1)^{-3} - 2C(1)^2}}$$

Luego despejamos C: $C = 1$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x^{-3}(\ln(x))+2x^{-3}-2x^2}} \text{ sol. Particular}$$

1.4.2 Solución de EDOs no lineales reducibles a EDOs lineales (Ecuación de Ricatti)

Estas EDOs se presentan de la forma:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{1-58}$$

Siendo $p(x)$, $q(x)$ funciones dependientes únicamente de la variable x, luego, el coeficiente de y' es igual a uno. Se puede observar claramente que la EDO es de grado 2, con ello no es una EDO lineal, sin embargo, se puede modificar la misma de tal manera que se pueda solucionar mediante el método EDO lineal. (Ross, S., 1992)

Para poder solucionar este tipo de EDO también se debe conocer de antemano una solución particular *u(x)*.

<u>Procedimiento de resolución:</u>

a) Establecer el cambio de variable

$$y = u + \frac{1}{v} \tag{1-569}$$

b) La ecuación deferencial cambiará a la forma:

$$\frac{dv}{dx} + v(2uP + Q) + P = 0 \tag{1-6057}$$

c) Siendo *P* y *Q* los coeficientes (funciones de la variable independiente), *u* la solución particular, se transforma en una EDO lineal, el objetivo es solucionar la variable v.

d) Regresar a la variable original (solución de la EDO) mediante la expresión (1-60)

Ejercicios Propuestos

Verifique si se tratan de EDOs no lineales, según corresponda utilice el método de resolución correspondiente (Bernoulli o Ricatti) para encontrar la respuesta singular o general.

1) $\frac{dy}{x} + y\,dx = \frac{y^2}{x}dx$

2) $\frac{xy'}{y^2} + \frac{1}{y} = x^2 senx$

3) $y' = -\ln x\, y^2 + \frac{y}{x}$

4) $y' = 2y^2 + y - 1 \qquad siendo\ u(x) = 1$

5) $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - senx \qquad siendo\ u(x) = x$

1.5 Resolución de EDOs de primer orden exactas y reducibles a exactas

Una EDO se denomina *exacta,* si y solo si los términos de la diferencial total, al ser desarrolladas mediante derivadas parciales son equivalentes, sea la diferencial total de la forma (1-9)

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1-6158}$$

Si se comprueba que (1-57) es una igualdad, la EDO es exacta.

<u>Procedimiento de resolución:</u>

a) Determinar la exactitud de la EDO, establecer para ello los valores de *M* y *N*

b) Integrar el término *M* respecto a *x*, luego añadir el término $g(y)$

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y) \tag{1-6259}$$

c) Derivar (1-58) respecto a *y*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{dg}{dy} \tag{1-6360}$$

d) Igualar el resultado de (1-59) a la expresión *N*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + \frac{dg}{dy} = N(x,y) \tag{1-614}$$

Al desarrollar el paso d) se obtendrá la solución de la expresión $g(y)$, para ello se requerirá simplificar expresiones y luego integrar (considerar la constante de integración *C* y su resolución si se trata de un PVI)

e) Al obtener el resultado de $g(y)$ se debe regresar a la solución general de la EDO exacta de la forma (1-58)

$$\int M(x,y)\,\mathrm{d}x + g(y)$$

EJERCICIO 1.

- ***Dada la siguiente EDO:***

$$(4xy - y^2)dx + (2x^2 - 2xy)dy = 0 \tag{1-625}$$

Hallar la solución general.

Solución:

a) Comprobación de exactitud: se identifican los términos *M* y *N*:

$M = 4xy - y^2$ $\qquad\qquad$ $N = 2x^2 - 2xy$

Si se aplican las derivadas parciales para M a respecto a y, N respecto a x, se obtiene:

$M_y = 4x - 2y$ $\qquad\qquad$ $N_x = 4x - 2y$

Al comprobar $M_y = Nx$, resulta ser verdadero por lo que se concluye que es una EDO exacta.

b) Se busca una función F *tal* que $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$*)*, se puede tomar cualquiera de las dos igualdades, en este caso se considera M, queda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4xy - y^2 \tag{1-66}$$

c) Se integra (1-62) respecto a la variable x

$$\int dF = \int (4xy - y^2)dx$$

Al resultado se le agrega la contante arbitraria de integración en función de y, $g(y)$ ya que se considera esta variable como constante.

$$F = 2x^2y - xy^2 + g(y) \tag{1-67}$$

d) Para encontrar el valor de la constante de integración $g(y)$, es necesario derivar el valor de (1-67) respecto a y.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(2x^2y - xy^2 + g(y))}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2 - 2xy + g'(y) \tag{1-68}$$

e) El resultado de (1-68) se iguala a $N(x,y)$, que es un valor que se conoce, según la definición.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

De esta igualdad se obtiene:

$$2x^2 - 2xy + g'(y) = 2x^2 - 2xy$$

Simplificando términos iguales se obtiene:

$$g'(y) = 0$$

Por lo tanto, el valor del valor de la constante de integración es:

$$g(y) = 0$$

Reemplazando en (1-63):

$$F = 2x^2y - xy^2 + 0$$

Esta se debe igualar a una constante según la definición, por lo tanto, se tiene:

$$2x^2y - xy^2 + 0 = C$$

La solución general de la EDO exacta es:

$$2x^2y - xy^2 = C$$

EJEMPLO 2

- ***Demostrar que la siguiente ecuación diferencial no es exacta.***

$$(2e^{\gamma} + 3x\ sen\ y)dx + (xe^{\gamma} + x^2\ cos\ y)dy = 0$$

$$\frac{a}{ay}(2e^{\gamma} + 3x\ sen\ y) = 2e^{\gamma} + 3x \cos y\ \neq \frac{a}{ax}(xe^{\gamma} + x^2 \cos y) = e^{\gamma} + 2x \cos y.$$

- ***Demostrar que si la EDO anterior se multiplica toda la ecuación por x se obtiene una ecuación diferencial exacta.***

$$(2xe^{\gamma} + 3x^2\ sen\ y)dx + (x^2e^{\gamma} + x^3\ cos\ y)dy = 0$$

que sí es diferencial exacta ya que:

$$\frac{a}{ay}(2xe^{\gamma} + 3x^2\ sen\ y) = 2xe^{\gamma} + 3x^2 \cos y\ \neq \frac{a}{ax}(x^2e^{\gamma} + x^3 \cos y)$$

Al factor μ(x, y) tal que, al multiplicar una ecuación diferencial por dicho factor, ésta se convierte en exacta, se le llama factor integrante.

Ambas ecuaciones tienen esencialmente las mismas soluciones, pero al multiplicar por el factor integrante μ(x, y) es posible ganar o perder soluciones.

EJEMPLO 3

- ***Comprobar que μ(x, y) = xy^2 es factor integrante de la ecuación:***

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y - 1)dy = 0$$

a) Al multiplicar la EDO por la función xy^2 se obtiene:

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y - 1)dy = 0$$

b) Al resolver la ecuación, se tendría que su solución será de la forma F(x, y) = C, siendo F una función tal que

$$\frac{af}{ax} = 2xy^3 - 6x^2y^2$$

$$\frac{af}{ay} = 3x^2\, y^2 - 4x^3 y.$$

c) Integrando respecto de x se tiene que

F(x, y) = Z (2xy3 −6x 2 y 2)dx = x 2 y 3 −2x 3 y 2 +ϕ(y

d) Derivando esta expresión respecto de y:

$$\frac{af}{ay} = 3x^2\, y^2 - 4x^3 y + \phi\ (y)$$

e) Igualando esta ecuación con la ecuación

$$3x^2\, y^2 - 4x^3\, y + \phi\ 0\ (y) = 3x^2\, y^2 - 4x^3 y$$

f) de donde al despejar ϕ 0 (y) se tiene que ϕ 0 (y) =0 y de esta forma se obtiene que ϕ(y) = k, tome k = 0

Por tanto,

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

Y la solución general de la ecuación diferencial está dada por

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = c$$

Como se ha comentado, al multiplicar la EDO por el factor integrante μ(x, y) es posible ganar o perder soluciones. En este caso, al multiplicar la ecuación por xy^2 , se ha obtenido y = 0 como solución. (Ross, S., 1992)

1.5.1 Solución de EDOs de primer orden reducibles a exactas

Una EDO es *reducible a exacta* si se tiene la forma:

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Sin embargo, si en la EDO se comprueba que al igualar los términos *M, N* (con sus respectivas derivadas parciales) no se llega a una igualdad.

$$\text{Si } M_y \neq N_x \tag{1-69}$$

Se dice entonces que la EDO no tiene exactitud, y es allí donde se utiliza un *factor integrante u(x,y)* que al multiplicar por los términos de la EDO (en forma de diferencial total) se transforme en un ejercicio de EDO exacta.

$$u(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (\text{ 1-70})$$

Luego de determinar que no se trate de otro tipo de EDO, se puede aplicar el siguiente procedimiento.

<u>Procedimiento de resolución</u>:

a) Determinar las expresiones: $M(x,y)d$x ; $N(x,y)\,\mathrm{d}y$

b) Desarrollar las expresiones (incluyendo las derivadas parciales):

$$\frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \qquad (\text{ 1-7163})$$

$$\frac{1}{M(x,y)}\left[-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right] \qquad (\text{ 1-7264})$$

c) Determinar si al desarrollar (1-66) o (1-67) en alguna de estas expresiones resulta en función solamente de la variable *x* o de *y*, si eso es afirmativo, se trata de un *Factor Integrante* de la forma

$$u(x,y) = e^{\int \frac{1}{N(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dx} \qquad (\text{ 1-73})$$

$$u(x,y) = e^{\int \frac{1}{M(x,y)}\left[-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dy} \qquad (\text{ 1-7465})$$

d) Aplicar el factor integrante a la EDO inicial y comprobar si se transformó en EDO EXACTA

e) Resolver la EDO mediante resolución de EDO exacta.

EJERCICIO 2:

➢ ***Obtener la solución general para la siguiente ecuación diferencial***

$$x^4y\,dx + (4x^5 + 6y^3 - 10)dy = 0 \tag{1-665}$$

a) Comprobación de exactitud de la EDO. Se identifica $\mathrm{M(x,y)}$ y $\mathrm{N(x,y)}$

De la expresión (1-70), se obtiene:

$M(x,y) = x^4y \qquad N(x,y) = 4x^5 + 6y^3 - 10$

Encontrando las derivadas parciales: M_y y N_x

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = x^4$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 20x^4$$

Se puede comprobar que $M_y \neq N_x$, por lo tanto, la ecuación no es exacta, se requiere utilizar un factor integrante en su resolución.

b) Cálculo del factor integrante:

Para el ejemplo se calcula el factor integrante en función de la variable *y*. Se utiliza la expresión (1-69)

$$u(y) = e^{\int \frac{1}{M(x,y)}\left[-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]dy}$$

Reemplazando los valores correspondientes y resolviendo la integral:

$$u(y) = e^{\int \frac{20x^4 - x^4}{x^4y}dy}$$

Luego de operaciones algebraicas y propiedades de logaritmos, se obtiene como factor integrante:

$$u(y) = y^{19} \tag{1-676}$$

c) Multiplicar el factor integrante (1-71) en todos los términos de la ecuación (1-70) y comprobar su exactitud

$$y^{19}(x^4y\,dx) + y^{19}(4x^5 + 6y^3 - 10)dy = 0$$

$$y^{20}x^4dx + (4x^5y^{19} + 6y^{22} - 10y^{19})dy = 0 \tag{1-687}$$

Identificamos nuevamente los términos $M(x, y), N(x, y)$

$$M(x,y) = x^4y^{20} \qquad N(x,y) = 4x^5y^{19} + 6y^{22} - 10y^{19}$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} = 20x^4y^{19}$$

$$N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 20x^4y^{19}$$

Se puede comprobar que $M_y = N_x$, por lo tanto, la ecuación es exacta, para ello, se utiliza el procedimiento para solución general de EDOs exactas.

d) Determinar el valor de Fx

$$Fx = M(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^4y^{20} \tag{1-698}$$

e) Integrar el resultado de (1-73) respecto a la variable x

$$\int dF = \int (x^4y^{20})\,dx$$

A este resultado se le agrega la contante arbitraria de integración en función de y, $g(y)$ ya que se considera esta variable como constante.

$$F = \frac{x^5 y^{20}}{5} + g(y) \qquad (1\text{-}709)$$

f) Para encontrar el valor de la constante de integración $g(y)$, es necesario derivar el valor encontrado de (1-74) respecto a y.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{x^5 y^{20}}{5} + g(y))}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^{19}x^5 + g'(y) \qquad (1\text{-}80)$$

g) Igualar el resultado de (1-75) a $N(x, y)$, que es un valor que se conoce, según la definición.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

$$4y^{19}x^5 + g'(y) = 4x^5y^{19} + 6y^{22} - 10y^{19}$$

$$g'(y) = 6y^{22} - 10y^{19} \qquad (1\text{-}8171)$$

h) Integrar ambos lados de la ecuación (1-76)

$$g(y) = 6\int y^{22}\, dy - 10 \int y^{19} dy$$

$$g(y) = \tfrac{6}{23}y^{23} - \tfrac{1}{2}y^{20} + \mathrm{C} \qquad (1\text{-}8272)$$

i) Reemplazando el valor encontrado de (1-82) en la expresión (1-79), obteniéndose la solución de le EDO:

$$F = \tfrac{x^5y^{20}}{5} + \tfrac{6}{23}y^{23} - \tfrac{1}{2}y^{20} + \mathrm{C}$$

Ejercicios Propuestos

Verifique si se tratan de EDOs exactas o reducibles a exactas, según corresponda utilice el método de resolución correspondiente para encontrar la respuesta general.

1) $(ln\,x)y' + (xlnx - x)y = -2x$

2) $(3x^2 + 3y)\,dx + (3x + y^2)\,dy = 0$

3) $(2y + ysenxy)dx + (2x + xsenxy)dy = 0$

4) $(3 + ycos2x)dx + \left(1 + \frac{sen2x}{2}\right)dy = 0$

5) $(-e^{2y})dx - (2xe^{-2y})dy = 0$

6) $-y^2dx - (x^2 + 2xy)dy = 0$

7) $(x^2 - y)dy + xydx = 0$

1.6 Isóclinas y campos de direcciones

Según (Ross, S., 1992) para resolver una ecuación diferencial analíticamente en muchas ocasiones puede ser difícil o casi imposible. Sin embargo, existe una aproximación gráfica que se puede usar para aprender mucho acerca de la solución de una ecuación diferencial. Se trata de uno de los métodos para resolver varias clases de ecuaciones diferenciales de manera gráfica mediante la interpretación geométrica de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones; para metodología es útil analizar las ecuaciones de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Cuya solución es una función $y = f(x)$. Geométricamente, en la ecuación se afirma que, en cualquier punto (x,y) la pendiente (dy/dx) de la solución en ese punto está dada por f(x,y) Esto puede indicarse si se traza un pequeño segmento rectilíneo que pase por el punto (x, y) con la pendiente f (x,y).

La colección de todos esos segmentos rectilíneos se llama campo direccional de la ecuación diferencial. El campo direccional puede observarse si se trazan pequeños segmentos rectilíneos en algún conjunto representativo de puntos en el plano Se elige una rejilla rectangular de puntos. Una vez que se obtiene un esquema del campo direccional, a menudo es posible ver de inmediato el comportamiento cualitativo de las soluciones, o quizá observar regiones que tienen algún interés especial.

Si es necesario trazar manualmente el campo direccional de la ecuación xy diferencial $y = f(x, y)$. , es útil observar que la pendiente y de la solución tiene valor constante en todos los puntos de la curva $f(x, y) = c$. Estas curvas se denominan curvas isoclinas.

Para ecuaciones relativamente simples es posible trazar el campo direccional dibujando unas cuantas isoclinas y luego insertar los segmentos rectilíneos tangentes a la solución en varios puntos de cada una. Cuando se hace variar el parámetro c, obtenemos un conjunto de isoclinas en los elementos lineales se constituyen adecuadamente.

La totalidad de esos elementos lineales se llama de diversos modos: campo de direcciones, campo direccional, campo pendiente o campo de elementos lineales de la ecuación diferencial ${}^{dx}/_{dy} = f(x, y)$, el campo de direcciones recuerda las líneas de flujo de la familia de curvas de solución de la ecuación diferencial de la cual obtenemos soluciones particulares como pueden ser los puntos (0,1), (2,3) etc.

CAPÍTULO 2

GENERALIDADES SOBRE PROGRAMACION EN OCTAVE Y MS EXCEL

2. Generalidades en Programación con Octave

2.1 ¿Qué es Octave?

GNU Octave es un lenguaje de alto nivel destinado para el cálculo numérico. Provee una interfaz sencilla, orientada a la línea de comandos (consola), que permite la resolución de problemas numéricos, lineales y no lineales, además permite la ejecución de scripts y puede ser usado como lenguaje orientado al procesamiento por lotes. Octave nació alrededor del año 1988, y fue concebido originalmente para ser usado en un curso de diseño de reactores químicos para los alumnos de Ingeniería Química de la Universidad de Texas y la Universidad de Wisconsin-Madison.

Octave posee una gran cantidad de herramientas que permiten resolver problemas de algebra lineal, cálculo de raíces de ecuaciones no lineales, integración de funciones ordinarias, manipulación de polinomios, integración de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales algebraicas. Sus funciones también se pueden extender mediante funciones definidas por el usuario escritas en el lenguaje propio de Octave o usando módulos dinámicamente cargados escritos en lenguajes como C, C++ y Fortran entre otros.

2.2 Variables

Una VARIABLE es un nombre simbólico que identifica una parte de la memoria, y en la que podemos guardar números u otro tipo de datos. ES UN “SITIO” EN LA MEMORIA DEL ORDENADOR PARA “GUARDAR” DATOS.

El contenido de una variable lo podemos recuperar y modificar cuantas veces queramos, a lo largo de una sesión de trabajo. Se le pueden dar a las variables los nombres que queramos, formados por letras y números, hasta un máximo de 19, y comenzando por una letra.

Figura 10. *Variables en Octave.*

Atención: *OCTAVE distingue entre letras mayúsculas y minúsculas*

EJEMPLOS DE NOMBRES DE VARIABLES

Variables	Variables	Variables
a	peso	Tierra
XY	Peso	Juan
ab12	PESO	Plata
Pascal	PeSo	TESLA

La figura 4 muestra ejemplo de variables en OCTAVE, estas no necesitan ningún tipo de declaración y pueden almacenar sucesivamente distintos tipos de datos: enteros, reales, escalares, matriciales, caracteres, etc. Para CREAR una variable basta con asignarle un valor. Para ASIGNAR un valor a una variable se utiliza una instrucción de asignación:

Figura 11. *Asignación de valores a variables en Octave.*

>> nombre de variable = expresión

```
>> ab=321
>> AB=3
>> x1=1/2
>> y1=1−4^2
```

Variables predefinidas

Algunos nombres están predefinidos por OCTAVE:

Figura 12. *Variables predefinidas en Octave.*

EJEMPLOS VARIABLES PREDEFINIDAS

Variables	Función
ans	Variable del sistema para almacenar el resultado de evaluar expresiones
i , j	unidad imaginaria : raiz cuadrada de -1
pi	número π
Inf	"Infinito": número mayor que el más grande que se puede almacenar
NaN	"Not a Number : magnitud no numérica resultado de cálculos indefinidos
eps	Precisión relativa en punto flotante (2.2204e-016)
realmin	El número real positivo más pequeño que es utilizable (2.2251e-308)
realmax	El número real positivo más grande que es utilizable (1.7977e+308)

Figura 13. *Ejemplo de variables en Octave,*

```
>> format long
>> pi
>> 1/0
>> 0/0
>> eps
>> realmin
>> realmax
ans = 3.14159265358979
ans = Inf
ans = NaN
ans = 2.22044604925031e−016
ans = 2.22507385850720e−308
ans = 1.79769313486232e+308
```

2.3 Estructuras de repetición en Octave

Estructura de repetición FOR

El bucle FOR se utiliza cuando nos interesa repetir un bloque de instrucciones un NÚMERO PREDETERMINADO DE VECES.

La estructura FOR es de la siguiente forma:

Figura 14. *Bucle FOR en Octave.*

```
for i=vector
   instrucciones
end
```

```
for i=[inicial:incremento:final]
   instrucciones
end
```

```
for i=[1:5]
  j=2*i
  disp(j)
end
```

El conjunto de instrucciones se repite para cada elemento del vector, denominándose ITERACIÓN a cada una de estas repeticiones. (Simmons, G., 2017)

En cada iteración, *i* (contador) toma de forma ordenada el valor de cada elemento del vector.

Estructura de repetición WHILE

El bucle WHILE es una estructura que se utiliza para repetir un conjunto de instrucciones mientras se cumpla una condición lógica determinada.

La estructura general de este bucle es la siguiente:

Figura 15. *Bucle WHILE en Octave.*

```
while condición
   instrucciones
End
```

```
i=0
v=0
while i < 3
  v=v+(i*2)
   i=i+1
end
disp(v)
```

Mientras (en inglés, WHILE) la condición es verdadera, se ejecutan las instrucciones, tras lo cual se vuelve a comprobar la condición. En el momento en que esta es falsa, se termina el bucle.

LA VARIABLE QUE SE EVALÚA DEBE CAMBIAR CADA VEZ QUE SE REPITE EL BUCLE, DE LOS CONTRARIO SERÍA UN CICLO INFINITO

Estructura de repetición DO UNTIL

El Bucle DO-UNTIL (Repetir Hasta) es muy similar al bucle WHILE, la finalización de bucle está ligada al cumplimiento de una condición.

La estructura DO-UNTIL es de la siguiente forma:

***Figura 16**. Bucle DO en Octave.*

```
do
  instrucciones
until condición
```

```
%mostrar números por pantalla hasta que llegue al número 3
i=0
do
  disp(i)
  i=i+1
until i>2
```

Las instrucciones del bucle se ejecutan al menos una vez, el bucle DO-UNTIL la condición se comprueba al final de la estructura y se ejecutan las ordenes hasta que se cumple la condición.

TIPS:

- Bucle FOR: Repetición de un conjunto de instrucciones un numero predeterminado de veces.
- Bucle WHILE: cumplimiento de una condición al inicio del bucle para la finalización del ciclo. Las instrucciones del bucle se ejecutan 0 o más veces.
- Bucle DO-UNTIL: Cumplimiento de una condición al final del bucle para la finalización del ciclo. Las instrucciones del bucle se ejecutan 1o más veces.

2.4 Ejemplo de programación:

Supongamos que queremos calcular 1/(1−x) con un desarrollo de Taylor de la función:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{i=0}^{\infty}x^{i}=1+x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+\ldots$$

Se desea calcular 8 términos de la serie, por lo tanto, utilizamos un bucle FOR, con x=0.6.

Figura 17. *Ejemplo de programación en Octave con bucle FOR.*

```
disp('EJEMPLO BUCLE FOR')
format short;
x = 0.6;
suma = 0;
for i = 0:7
  suma = suma + (x^i)
endfor
disp(suma)
```

```
suma =  1
suma =  1.6000
suma =  1.9600
suma =  2.1760
suma =  2.3056
suma =  2.3834
suma =  2.4300
suma =  2.4580
```

Obtener el resultado con una cierta precisión, en ese caso, debemos comprobar que la diferencia entre los dos últimos valores calculados sea menor que un cierto valor pequeño, digamos 0.00001.

En ese caso resulta más conveniente la utilización de un bucle WHILE o DO-UNTIL:

Figura 18. *Ejemplo de programación en Octave con bucle WHILE o DO.*

```
disp('EJEMPLO BUCLE WHILE')
format short;
x = 0.6;
precision = 0.00001 ;
suma = 1;
termino = 1 ; % Inicializacion
while abs(termino) > precision
  termino = termino*x;
  suma = suma + termino;
endwhile
suma
```

```
disp('EJEMPLO BUCLE do-until')
format short;
x = 0.6;
precision = 0.00001 ;
suma = 1;
termino = 1 ; % Inicializacion
do
  termino = termino*x;
  suma = suma + termino;
until abs(termino) < precision
suma
```

2.5 Ejercicios propuestos de programación:

1. Se tienen N disoluciones numeradas de 1 a N y se mide el pH y la temperatura de cada disolución.

Desarrolle el algoritmo en código OCTAVE, cuyo programa debe pedir al usuario el número de disoluciones N y los valores de temperatura y pH de esas N disoluciones.

Debe mostrará en pantalla:

1) La temperatura media de las disoluciones claramente ácidas (pH < 6.5)

2) La temperatura media de las disoluciones claramente básicas (pH > 7.5)

3) La temperatura media de las disoluciones neutras (6.5 ≤ pH ≤7.5)

Considere al escribir el programa que puede no haber disoluciones en uno de los grupos de pH (por ejemplo, podría no haber disoluciones ácidas). En ese caso, al ejecutar el programa se generaría un error al calcular la media (por dividir por cero), debe incluir los controles necesarios para que, en el caso de que no exista disoluciones de un grupo, el programa lo indique al usuario.

2. Determine la salida de los siguientes códigos, e inserte comentarios en cada línea de código con la finalidad de conocer que hace cada una, para culminar explique claramente lo que hace cada código.

a)
```
i = 0 ;
while i <= 3
   disp(i) ;
   i = i + 1;
end
disp('Terminado');
```

c)
```
i = 3 ;
while i < 10
   disp(i) ;
   i = i + 2;
end
disp('Terminado');
```

b)
```
i = 0 ;
while i < 10
   disp(i) ;
   i = i + 2;
end
disp('Terminado');
```

d)
```
i = 1 ;
while i < 100
   i = i * 2;
   disp(i) ;
end
disp('Terminado');
```

CAPÍTULO 3

RESOLUCIONES NUMÉRICAS DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

En la ingeniería los métodos numéricos y las computadoras poseen una importancia significativa, ya que constituyen técnicas de soluciones a problemas matemáticos mediante el uso de muchos cálculos aritméticos fáciles de resolver por las computadoras aprovechando su capacidad de procesamiento para obtener soluciones aproximadas aun cuando nos sea posible una solución analítica. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Los propósitos con los que se aplican los métodos numéricos son varios, por ejemplo: para encontrar las raíces de ecuaciones, soluciones a sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, optimización, ajuste de curvas, integración, solución a ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales parciales.

Cuando se presentan problemas como ecuaciones diferenciales de valor inicial no lineales que no se pueden resolver aplicando métodos analíticos para hallar una solución exacta, los métodos numéricos se convierten en poderosas herramientas para encontrar una solución aproximada. Existe un sin número de métodos numéricos para este propósito, pero se presentan de interés para describir Euler, Heun y Runge Kutta por que constituyen una base para otros y son los más utilizados.

Como se detalló anteriormente, la gran mayoría de fenómenos físicos-químicos teóricos en todas las ramas de ingeniería se demuestran mediante *modelos matemáticos,* luego estas expresiones se requiere resolverlas matemáticamente de tal manera que se pueda obtener los valores requeridos en cada proceso. Los modelos matemáticos no son más que ecuaciones que se las denomina EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias), luego, al plantear requisitos iniciales, se denominan PVI (problemas de valor inicial).

En el apartado anterior se desarrolló algunas técnicas analíticas de resolución de EDO de primer orden, es decir, aquellas ecuaciones que se pueden resolver mediante una secuencia de pasos que concluirá en la obtención de la *solución* de esta (se pueden obtener soluciones generales, particulares o singulares). Pero también existen EDO que no se pueden resolver de una manera tan simple como una resolución matemática, es decir, simplemente **no se puede obtener una respuesta analítica** debido a que la EDO es demasiado compleja, demasiado extensa, involucra demasiadas variables, o simplemente no existen los recursos suficientes para encontrar una ecuación como respuesta; en otros casos se buscará también comprobar que la respuesta analítica sea la correcta. Se plantea entonces otras técnicas de resolución denominados **métodos de resolución numérica.**

Al contrario de las respuestas analíticas o exactas, para estos métodos no se obtendrá una ecuación que caracterice el fenómeno estudiado, se encontrará en su defecto respuestas puntuales o “discretas”, es decir, valores numéricos por cada punto analizado, determinando por este medio una *aproximación* de las soluciones en cada punto. Al tratarse de aproximaciones, es lógico pensar que se alcanzará *errores* calculables entre las respuestas analíticas y numéricas, sin embargo, estos errores se pueden reducir utilizando técnicas numéricas cada vez más avanzadas. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Si se trata de resolución de PVI, mediante técnicas numéricas, se puede considerar la denominada “Condición de Lipschitz”, la cual indica que:

Sea:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [a, b] \qquad y(a) = y_a$$

Donde:

$y' = f(x, y)$ corresponde a la EDO de primer orden.

$x \in [a, b]$ corresponde a los valores de la variable independiente en el intervalo analizado.

$y(a) = y_a$ corresponde a la condición inicial, por lo tanto, se trata de un PVI

Se obtendrá **una y solo una** solución de la forma:

$$y(x) \qquad x \in [a, b]$$

3.1 Discretización del problema

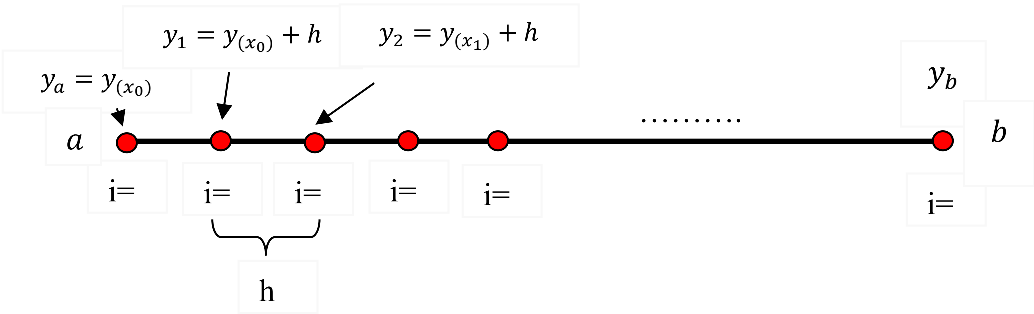
Como se determinó anteriormente, para la resolución numérica de un PVI se obtendrán “respuestas puntuales” o discretas, es decir, se requiere analizar el intervalo de la función de manera puntual.

$$y(x_i) \qquad\qquad i = 0,1,2,3,4 \ldots n \tag{3-1}$$

Donde $y(x_i)$ son las respuestas del PVI en cada punto i.

Los valores de i=*0,1,2,3……n* son los puntos para analizar (discretización).

Sea un PVI de la forma: $y' = f(x, y),\ x \in [a, b]$ se requiere subdividir en nodos e intervalos:



Sea h la distancia entre puntos o nodos, se lo denomina *"paso"* y n el número de puntos a utilizar dentro del intervalo [a,b]

$$h = \frac{b - a}{n} \tag{3-2}$$

Por lo tanto, las soluciones aproximadas en cada punto serán:

$$y_i \approx y(x_i)$$

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_1 = y(x_1)$$
$$y_2 = y(x_2) \ldots$$
$$y_n = y(x_n)$$

Donde $y(x_0) = y_a = a$ se trata de la condición inicial del PVI

$$y(x_1) = a + h$$

$$y(x_2) = a + 2h$$

$$y(x_3) = a + 3h\ldots\ldots$$

$$y(x_n) = a + nh = b$$

Es decir, para la resolución numérica de un PVI se requiere conocer el valor de h que será constante para todos los intervalos, y su cálculo se basa en el punto anterior, de esta manera se podría expresar como:

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(x_{i_1} y_i\right) \tag{3-3}$$

3.2 Resolución de EDOs de primer orden por métodos numéricos

3.2.1 Resolución de EDOS de primer orden por el método de Euler:

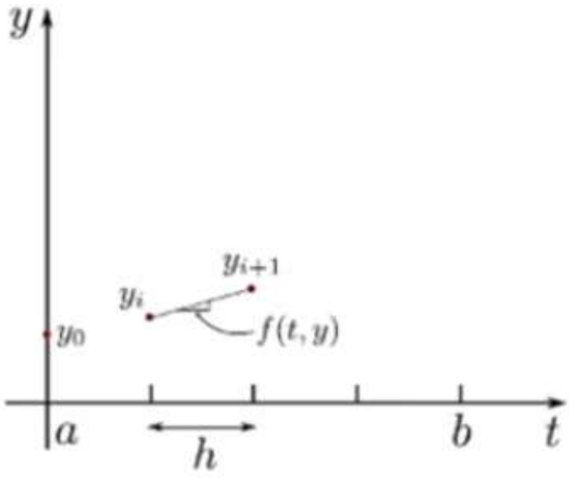
El método numérico de Euler es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones ordinarias de primer orden (EDO) a partir de un valor inicial dado, es simple y es la base para otros métodos numéricos. Es ilustrativo para explicar conceptos de importancia en el uso de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales con problema de valor inicial. Este método permite resolver ecuaciones de la forma (2).

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad a < t < b \; con \; y(a) = \alpha \tag{3-4}$$

Se puede observar que $\frac{dy}{dt}$ es una función $f(t, y)$ que depende de t y y, en un dominio de la variable independiente t qua va desde un valor arbitrario a hasta b con valor inicial en a igual a una constante α. El objetivo es aproximar $y(t)$ de tal manera que se pueda satisfacer la ecuación diferencial y también la condición inicial. (Simmons, G., 2017)

En la Figura 3, se presenta la información necesaria con la que va a trabajar para deducir el esquema del método de Euler.

Figura 19. *Deducción del Método de Euler.*



Inicialmente se discretiza la variable t en un tamaño de paso h para tener n elementos igualmente espaciados, si se parte de la serie de Taylor se observa que es posible estimar el valor siguiente y_{i+1}, a partir de la información en el punto i, tal y como se presenta en la Ilustración 1.

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{dy(t_i)}{dt} + \frac{1}{2}h^2\,\frac{d^2y(t_i)}{dt^2} + \cdots. \tag{3-5}$$

Se puede observar que i, representa la información en el punto analizado, h, representa el tamaño de paso, $\frac{dy(t_i)}{dt}$ representa la primera derivada de y en el punto i respeto al tiempo y $\frac{d^2y(t_i)}{dt^2}$, representa la segunda derivada de y en el punto i respecto al tiempo.

De esta forma si se consideran solo los dos primeros términos de la serie de Taylor tal cual se muestra en (2-5).

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{dy(t_i)}{dt}. \tag{3-6}$$

Es posible aproximar la variación de y_i a y_{i+1} como una línea recta de pendiente $\frac{dy}{dt}$, donde $\frac{dy}{dt}$ está definida como $f(t,y)$, por lo que la pendiente es información que se conoce, entonces el esquema del método de Euler queda totalmente establecido tal cual se muestra en (2-6).

$$y_{i+1} = y_i + h \, . f(t_i, y_i). \tag{3-7}$$

Entonces la aproximación de la próxima solución y_{i+1}, parte de la solución anterior y_i, con un incremento del producto del paso h que es la distancia que se mueve sobre la tangente, por la evaluación de la función $f(t, y)$ que es la ecuación diferencial en función de las variables independientes evaluado en el punto i. Esta aproximación está sujeta a un error, donde el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso, y el error global es proporcional al tamaño del paso.

Programación de la tabla para hallar una solución aproximada por el método de Euler

Ejercicio 1. Dada $y' + 20y - \frac{7}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$y $y(0) = 5$, calcule por Euler la solución aproximada (con nueve decimales) para $x = 0.1$, utilizando $h = 0.01$.

Se expresa la EDO en la forma $y' = f(x, y)$

$$f(x, y) \ = -20y + 7\mathrm{e}^{-0.5x}$$

$$y' = -20y + 7\mathrm{e}^{-0.5x}$$

La función $f(x, y)$ está definido en el intervalo $x \in [a, b]$, el PVI $y(a) = y_a$, es $\mathrm{y}(0) = 5$, entonces se determinó el valor inicial de x, con $x_0 = a = 0$ y el valor inicial de y, con $y_0 = y_a = 5$, estos valores se marcan la tabla continuación con color amarillo.

En este caso se da a conocer el valor del paso $h = 0.01$, y el valor del limite superior del intervalo que corresponde a $x_f = b = 0.1$, en este valor se solicita calcular el valor de y, y se marca en la tabla con color verde.

Entonces el número de iteraciones es:

$$n = \frac{x_f - x_0}{h}$$

$$n = \frac{0.1 - 0}{0.01}$$

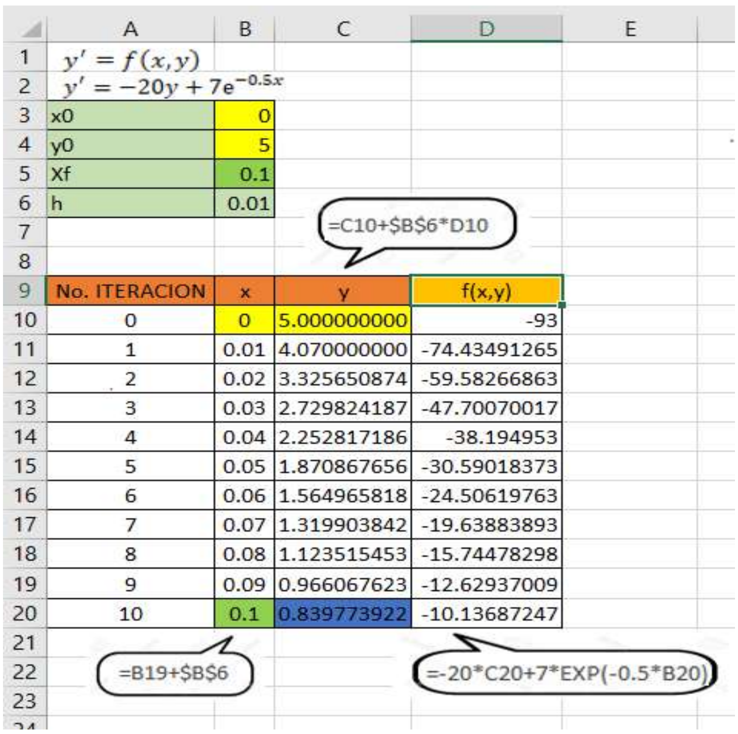
$$n = 10$$

Tabla 2. *Ejercicio 1 Método Euler en Excel.*

Etiqueta en tabla	Celda	Valor	Descripción
x_0	B3	0	x inicial, límite inferior del intervalo
y_0	B4	5	y inicial
x_f	B5	0.1	x final, límite superior del intervalo
n	B6	10	Número de pasos o iteraciones o repeticiones
h	B7	0.01	Tamaño de paso

Estos datos permitirán encontrar los valores de la tabla que se muestra a continuación:

Figura 20. *Ejercicio 1 Resultados obtenidos por Método Euler programación Excel.*



	A	B	C	D	E
1	$y' = f(x,y)$				
2	$y' = -20y + 7e^{-0.5x}$				
3	x0	0			
4	y0	5			
5	Xf	0.1			
6	h	0.01			
7					
8					
9	No. ITERACION	x	y	f(x,y)	
10	0	0	5.000000000	-93	
11	1	0.01	4.070000000	-74.43491265	
12	2	0.02	3.325650874	-59.58266863	
13	3	0.03	2.729824187	-47.70070017	
14	4	0.04	2.252817186	-38.194953	
15	5	0.05	1.870867656	-30.59018373	
16	6	0.06	1.564965818	-24.50619763	
17	7	0.07	1.319903842	-19.63883893	
18	8	0.08	1.123515453	-15.74478298	
19	9	0.09	0.966067623	-12.62937009	
20	10	0.1	0.839773922	-10.13687247	
21					
22					
23					

En la Figura 14, los valores que se deben cambiar para diferentes valores de la función $f(x,y)$ distinta reside es precisamente la evaluación de esta función y se marca en la tabla de color naranja, estos son necesarios para encontrar el valor siguiente hasta llegar al punto x =0.1, estos valores se encuentran en la tabla a continuacion verticalmente de la celda C10 que contiene el valor inicial de y =5, desde la celda C11 hasta la celda C20, donde se encuentra marcado con azul y es el valor aproximado a encontrar.

Tabla 3. *Ejercicio 1 Características de ejercicio 1.*

Etiqueta en tabla	**Celda**	**Ecuación Excel**	**Descripción**
No. ITERACION	A10.. A20	=A10+1	Ya que se solicita que se usen 10 paso de inicia en 0 hasta 10
x	B10..B20	=B10+$B$6	$x = 0$ es el valor inicial, a partir del siguiente valor se debe sumar el valor del paso $h = 0.5$, hasta $x = 5$.
y	C10..C20	=C10+$B$6*D10	$y = 5$ es el valor inicial, a partir del siguiente se debe aplicar la formula: $y_{i+1} = y_i + h \,.\, f(t_i, y_i)$., hasta llegar a la iteración 10, el valor de i corresponde a y anterior.
$f(x,y)$	D10..D20	=-20*C10+7*EXP(-0.5*B10)	Se calcula el valor de $f(x,y)$, donde el valor de i, corresponde al número de fila del valor de x e y.

Solución analítica:

Dada $y' + 20y - \frac{7}{e^{\frac{x}{2}}} = 0$ y $y(0) = 5$, calcule la solución para $x = 0.1$.

Se reescribe la EDO:

$$y' = f(x,y)$$

$$f(x,y) \;= -20y + 7e^{-0.5x}$$

$$y' = -20y + 7e^{-0.5x}$$

Se puede observar que es una EDO lineal de primer orden, se identifica $p(x) = 20$ y $q(x) = 7e^{-0.5x}$.

Se halla el factor de integración aplicando: $u(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$, entonces:

$$u(x) = \mathrm{e}^{\int 20\,\mathrm{d}x}$$

$$u(x) = e^{x}$$

Entonces el valor de y es:

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}^{20x}} \int \mathrm{e}^{20x} \cdot 7\mathrm{e}^{-0.5x}\,\mathrm{d}x$$

$$y = \frac{7}{\mathrm{e}^{20x}} \int \mathrm{e}^{\frac{39}{2}x}\,\mathrm{d}x$$

$$y = \frac{7}{\mathrm{e}^{20x}} \left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{39}{2}x}}{\frac{39}{2}} + c \right]$$

$$y = \frac{14}{39}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \frac{7C}{\mathrm{e}^{20x}}$$

La solución general es:

$$y = \frac{0.3589}{\mathrm{e}^{0.5x}} + \frac{c}{\mathrm{e}^{20x}}$$

Para encontrar la solución particular, se aplica la condición del problema de valor inicial $\mathrm{y}(0) = 5$.

Entonces cuando $x = 0$, $y = 5$.

$$5 = \frac{0.3589}{\mathrm{e}^{0.5(0)}} + \frac{C}{\mathrm{e}^{20(0)}}$$

$$5 = 0.3589 + c$$

Entonces el valor de $C = 4.6410$, por lo tanto, la solución particular es:

$$y = \frac{0.3589}{\mathrm{e}^{0.5x}} + \frac{4.6410}{\mathrm{e}^{20x}}$$

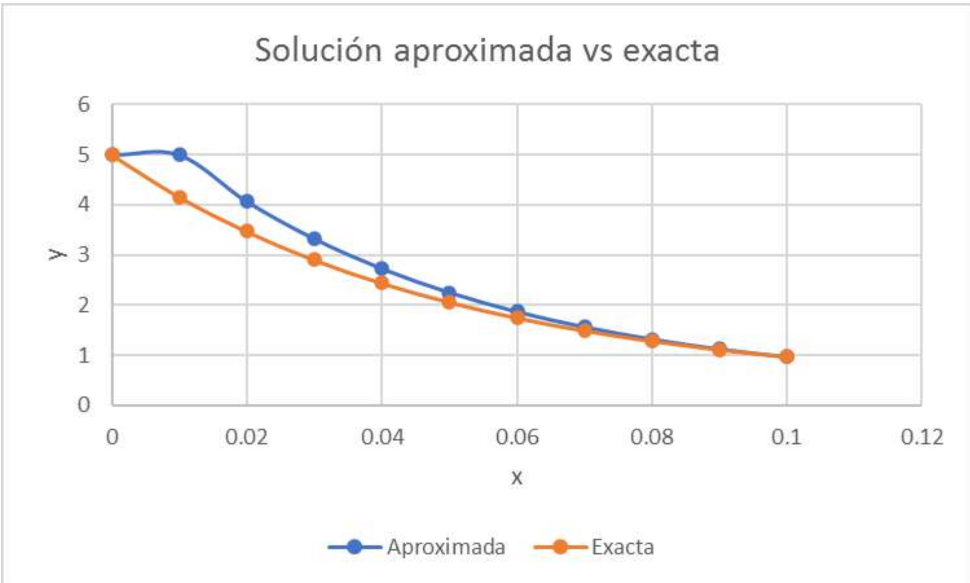
Los valores calculados con la solución particular se presentan en la tabla a continuación:

***Tabla 4**. Resultados obtenidos de ejercicio 1. Solución analítica.*

x	y
0	5
0.01	4.156839404
0.02	3.466284219
0.03	2.900591478
0.04	2.437129026
0.05	2.057367214
0.06	1.746135239
0.07	1.491012294
0.08	1.281829070
0.09	1.110259636
0.1	0.969487290

En la figura ase puede observar la gráfica de la solución aproximada obtenida por un método numérico y la solución analítica que se obtuvo por un método analítico.

***Figura 21.** Resultados obtenidos ejercicio 1 en forma gráfica.*



3.2.2 Resolución de EDOs de primer orden por el método de Euler mejorado (HEUN):

Como su nombre lo indica, se basa en el método numérico de Euler, modifica algún parámetro y busca mejorar las aproximaciones de las respuestas (disminución de errores).

Para ello considera las pendientes (derivadas) en el punto inicial y el punto final analizado, luego se determina el promedio entre ellas, reduciendo de esta manera el error cometido.

El método de Euler mejorado se desarrolla de manera iterativa hasta encontrar el mínimo error y mejor convergencia del método. Este método también es conocido como *predictor – corrector.* (Simmons, G., 2017)

Procedimiento de resolución:

Sea el PVI determinado de la siguiente forma:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [a, b] \qquad y(a) = y_a$$

Generalmente en la resolución del ejercicio se conocerá el valor del paso "h" o se establecerá el número de subintervalos *n.* Así mismo se conocerá el intervalo y la condición inicial. Para calcular el paso *h* se puede utilizar la expresión (2-2)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

a) Cumplir con la condición inicial, por lo tanto

$$y_0 = y_a$$

Donde y_0 corresponde a un dato del ejercicio numérico.

b) Determinar el valor de:

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i) \tag{3-8}$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_{i+1}, y_i + hk_1^{(i)}\right) \tag{3-9}$$

c) Determinar el valor del nuevo punto mediante la fórmula matemática:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h\left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)}\right)}{2} \tag{3-10}$$

Como corresponde en la discretización del problema los valores de *i* serán:

$$i = 0,1,2,3, \dots \dots \dots n - 1$$

d) MEJORAR LOS ERRORES COMETIDOS: En cada punto analizado, el nuevo valor encontrado y_{i+1} se reutiliza en el paso 2, para el cálculo de $k_2^{(i)}$, desarrollando *iterativamente* los cálculos matemáticos, al realizar varias veces este procedimiento, se mejorarán paso a paso el error cometido.

e) El cálculo finaliza cuando existe convergencia de resultados, es decir, que existen mínimas variaciones entre un resultado y otro.

Para los métodos Euler y Euler Mejorado (Heun) se puede reducir los errores en las aproximaciones incrementando el número de intervalos *n* o disminuyendo el paso *h*, siguiendo de esta manera la teoría de cálculo diferencial e integral.

Programación de la tabla para hallar una solución aproximada por el método de Heun

Ejercicio 2. Dada $4y' - 24x + 4y - 20 = 0$ y $y(0) = 5$, calcule por Heung la solución aproximada (con nueve decimales) para $x = 5$, utilizando $h = 0.5$.

Se manipula algebraicamente la ecuación, se divide para 4 con el fin de simplificar la ecuación, entonces:

$$y' = f(x, y)$$

$$f(x, y) \; = 6x - y + 5$$

$$y' = 6x - y + 5$$

La función $f(x, y)$ está definido en el intervalo $x \in [a, b]$, el PVI $y(a) = y_a$, es $\mathrm{y}(0) = 0$, entonces se determinó el valor inicial de x, con $x_0 = a = 0$ y el valor inicial de y, con $y_0 = y_a = 5$, estos valores se marcan la tabla continuación con color amarillo.

En este caso se da a conocer el valor del paso $h = 0.5$, y el valor del limite superior del intervalo que corresponde a $x_f = b = 5$, en este valor se solicita calcular el valor de y, y se marca en la tabla con color verde.

Entonces el número de iteraciones es:

$$n = \frac{x_f - x_0}{h}$$

$$n = \frac{5 - 0}{0.5}$$

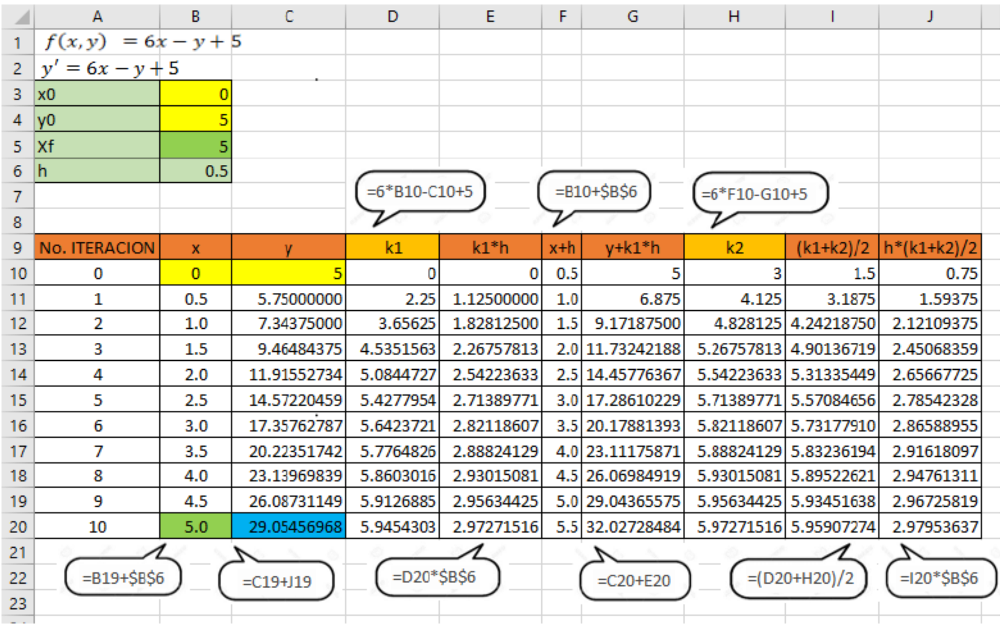
$$n = 10$$

Tabla 5. *Programación ejercicio resuelto por Método Heun en excel*

Etiqueta en tabla	Celda	Valor	Descripción
x_0	B3	0	x inicial, límite inferior del intervalo
y_0	B4	5	y inicial
x_f	B5	5	x final, límite superior del intervalo
n	B6	10	Número de pasos o iteraciones o repeticiones
h	B7	0.5	Tamaño de paso

Estos datos permitirán encontrar los valores de la tabla que se muestra a continuación:

Figura 22. *Resultados obtenidos en ejercicio 2 por método Heun en Excel.*



$f(x,y) \;= 6x - y + 5$

$y' = 6x - y + 5$

x0	0
y0	5
Xf	5
h	0.5

No. ITERACION	x	y	k1	k1*h	x+h	y+k1*h	k2	(k1+k2)/2	h*(k1+k2)/2
0	0	5	0	0	0.5	5	3	1.5	0.75
1	0.5	5.75000000	2.25	1.12500000	1.0	6.875	4.125	3.1875	1.59375
2	1.0	7.34375000	3.65625	1.82812500	1.5	9.17187500	4.828125	4.24218750	2.12109375
3	1.5	9.46484375	4.5351563	2.26757813	2.0	11.73242188	5.26757813	4.90136719	2.45068359
4	2.0	11.91552734	5.0844727	2.54223633	2.5	14.45776367	5.54223633	5.31335449	2.65667725
5	2.5	14.57220459	5.4277954	2.71389771	3.0	17.28610229	5.71389771	5.57084656	2.78542328
6	3.0	17.35762787	5.6423721	2.82118607	3.5	20.17881393	5.82118607	5.73177910	2.86588955
7	3.5	20.22351742	5.7764826	2.88824129	4.0	23.11175871	5.88824129	5.83236194	2.91618097
8	4.0	23.13969839	5.8603016	2.93015081	4.5	26.06984919	5.93015081	5.89522621	2.94761311
9	4.5	26.08731149	5.9126885	2.95634425	5.0	29.04365575	5.95634425	5.93451638	2.96725819
10	5.0	29.05456968	5.9454303	2.97271516	5.5	32.02728484	5.97271516	5.95907274	2.97953637

En esta tabla programada los valores que se deben cambiar para diferentes valores de la función $f(x,y)$ distinta reside en los valores de los parámetros $k1$ y $k2$, marcados de color naranja en la tabla, estos son necesarios para encontrar el valor siguiente hasta llegar al punto x =5, estos valores se encuentran en la tabla a continuacion verticalmente de la celda C10 que contiene el valor inicial de y =5, desde la celda C11 hasta la celda C20, donde se encuentra marcado con azul y es el valor aproximado a encontrar.

***Tabla 6**. Características de ejercicio 2 Método Heun en Excel.*

Etiqueta en tabla	Celda	Ecuación Excel	Descripción
No. ITERACION	A10.. A20	=A10+1	Ya que se solicita que se usen 10 paso de inicia en 0 hasta 10
x	B10..B20	=B10+$B$6	$x = 0$ es el valor inicial, a partir del siguiente valor se debe sumar el valor del paso $h = 0.5$, hasta $x = 5$.
y	C10..C20	=C10+J10	$y = 5$ es el valor inicial, a partir del siguiente se debe aplicar la formula: $y_{i+1} = y_i + \frac{h\left(k_1^{(i)}+k_2^{(i)}\right)}{2}$, hasta llegar a la iteración 10, el valor de i corresponde a y anterior.
$k1$	D10..D20	=6*B10-C10+5	El valor de $k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)$, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.
$k1 * h$	E10..E20	=6*B10-C10+5	Se calcula este valor, el incremento en y considerando el paso para cada paso como valor de i.
$x + h$	F10..F20	=B10+$B$6	Se actualiza el valor de x, se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$y + k1 * h$	G10..G20		Se actualiza el valor de y, se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$k2$	H10..H20	=6*F10-G10+5	El valor de $k_2^{(i)} = f\left(x_{i+1}, y_i + hk_1^{(i)}\right)$, corresponde a evaluar la función $f(x,y)$ en la posición siguiente, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.
$(k1 + k2)/2$	I10..I20	=(D10+H10)/2	Se calcula el valor promedio de las evaluaciones anterior y siguiente, este valor se realiza para cada paso como valor de i.

$h * (k1 + k2)/2$	J10..J20	=I10*$B$6	Se calcula el valor de un incremento corregido considerando el paso y la media de las evaluaciones, este valor es que se le agrega al y.anterior para conseguir la aproximación

Solución analítica:

Dada $4y' - 24x + 4y - 20 = 0$ y $y(0) = 5$, calcule por Heung la solución aproximada (con nueve decimales) para $x = 5$, utilizando $h = 0.5$. (Ross, S., 1992)

Se manipula algebraicamente la ecuación, se divide para 4 con el fin de simplificar la ecuación, entonces:

$$y' = f(x, y)$$
$$f(x, y) = 6x - y + 5$$
$$y' = 6x - y + 5$$

Para poder aplicar un método se puede reescribir como:

$$y' + y = 6x + 5$$

Como se puede observar, se trata de una EDO de primer orden lineal donde $p(x) = 1$ y $q(x) = 6x + 5$.

Se aplica $u(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ para encontrat el factor de integrante:

$$u(x) = \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}$$
$$u(x) = \mathrm{e}^{x}$$

Con el valor del factor integrante, se halla el valor de $y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)\mathrm{q}(x)\,\mathrm{d}x$, entonces:

$$y = \frac{1}{e^x} \int e^x (6x + 5)\,\mathrm{d}x$$
$$y = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \left[\int \mathrm{e}^x 6x\,\mathrm{d}x + \int 5\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \right]$$

Para el desarrollo de esta integral se aplica en $\int \mathrm{e}^x 6x \, \mathrm{d}x$ integración por partes:

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}^x}[6x\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^x + 5\mathrm{e}^x + C]$$

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}^x}\left[6x^{\mathrm{e}^x} - \mathrm{e}^x + C\right]$$

$$y = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}(6x - 1) + \frac{c}{\mathrm{e}^x}$$

$$y = 6x - 1 + \frac{c}{\mathrm{e}^x}$$

Para encontrar la solución particular, se aplica la condición del problema de valor inicial $\mathrm{y}(0) = 5$.

Entonces cuando $x = 0$, $y = 5$.

$$0 = 6(0) - 1 + \frac{c}{\mathrm{e}^0}$$

$$5 = -1 + C$$

Entonces el valor de $C = 6$, por lo tanto, la solución particular es:

$$y = 6x - 1 + \frac{6}{\mathrm{e}^x}$$

Los valores calculados con la solución particular se presentan en la tabla a continuación:

***Tabla** 7. Resultados obtenidos de ejercicio 2 por método analítico.*

x	y
0	5
0.5	5.639183958
1.0	7.207276647
1.5	9.338780961
2.0	11.8120117
2.5	14.49250999
3.0	17.29872241
3.5	20.1811843
4.0	23.10989383
4.5	26.06665398
5.0	29.04042768

En la figura 17 se puede observar la gráfica de la solución aproximada obtenida por un método numérico y la solución analítica que se obtuvo por un método analítico.

Figura 23. *Resolución gráfica del ejercicio 2, comparación método analítico y numérico*

3.2.3 Resolución de EDOs de primer orden por el método de Runge Kutta:

Los métodos numéricos hasta el momento analizados son de orden 1 (Euler) y orden 2 (Euler modificado), para estos se ha utilizado la determinación de pendientes, sin embargo, dependiendo de la aplicación del método de resolución siempre se buscará un valor de error mínimo, para mejorar las aproximaciones se plantea incrementar el orden de los métodos, se utiliza entonces los denominados métodos Runge – Kutta. (Nieto, H., 2004)

3.2.3.1 Método Runge Kutta orden 3

Se trata de un procedimiento muy similar al método Heun (orden 2), se incrementará una ecuación por obtener la solución numérica.

Procedimiento de resolución RK3:

Sea el PVI determinado de la siguiente forma:

$$y' = f(x,y) \qquad x \in [a,b] \qquad y(a) = y_a$$

a) Determinar el valor del paso mediante la expresión (2-2)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

b) Cumplir con la condición inicial, por lo tanto

$$y_0 = y_a$$

Donde y_0 corresponde a un dato del ejercicio.

c) Determinar el valor de:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3-41}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{3-12}$$

$$k_3 = f(x_i + h \ , \ y_i - hk_1 + 2hk_2) \tag{3-13}$$

d) Determinar el valor del nuevo punto mediante la fórmula matemática:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{3-14}$$

Como corresponde en la discretización del problema los valores de *i* serán:

$$i = 0,1,2,3, \dots \dots \dots n-1$$

3.2.4 Método Runge Kutta orden 4

Se trata de un procedimiento muy similar al método Heun y RK3, se incrementará una ecuación por obtener la solución numérica.

<u>*Procedimiento de resolución RK4:*</u>

Sea el PVI determinado de la siguiente forma:

$$y' = f(x,y) \qquad x \in [a,b] \qquad y(a) = y_a$$

a) Determinar el valor del paso mediante (2-2)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

b) Cumplir con la condición inicial, por lo tanto

$$y_0 = y_a$$

Donde y_0 corresponde a un dato del ejercicio.

c) Determinar el valor de:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3-15}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}\ , y_i + \frac{h}{2}k_1\right) \tag{3-16}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}\ \ , y_i + \frac{h}{2}k_2\right) \tag{3-17}$$

$$k_4 = f(x_i + h\ \ ,\ y_i + hk_3) \tag{3-18}$$

d) Determinar el valor del nuevo punto mediante la fórmula matemática:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{3-19}$$

Como corresponde en la discretización del problema los valores de *i* serán:

$$i = 0,1,2,3, \dots \dots \dots n - 1$$

3.2.5 Método Runge Kutta orden 5 (Butcher)

Se trata de un procedimiento muy similar al método Heun, RK3 y RK4, se incrementará una ecuación por obtener la solución numérica.

Procedimiento de resolución RK5:

Sea el PVI determinado de la siguiente forma:

$$y' = f(x, y) \qquad\qquad x \in [a, b] \qquad\qquad y(a) = y_a$$

a) Determinar el valor del paso mediante (2-2)

$$h = \frac{b-a}{n}$$

b) Cumplir con la condición inicial, por lo tanto

$$y_0 = y_a$$

Donde y_0 corresponde a un dato del ejercicio.

c) Determinar el valor de:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \tag{3-20}$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{4}k_1\right) \tag{3-21}$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{h}{8}k_1 + \frac{h}{8}k_2\right) \tag{3-22}$$

$$k_4 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - \frac{h}{2}k_2 + hk_3\right) \tag{3-23}$$

$$k_5 = f\left(x_i + \frac{3h}{4}, y_i + \frac{3h}{16}k_1 + \frac{9h}{16}k_4\right) \tag{3-24}$$

$$k_6 = f\left(x_i + h, y_i - \frac{3h}{7}k_1 + \frac{2h}{7}k_2 + \frac{12h}{7}k_3 - \frac{12h}{7}k_4 + \frac{8h}{7}k_5\right) \tag{3-25}$$

d) Determinar el valor del nuevo punto mediante la fórmula matemática:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \tag{3-56}$$

Como corresponde en la discretización del problema los valores de i serán:

$$i = 0,1,2,3, \dots \dots \dots n - 1$$

A mayor orden del método utilizado, mejor serán las aproximaciones de las respuestas, sin embargo, para cada uno de estos procedimientos se debe realizar continuas evaluaciones de funciones en determinados puntos, es por ello por lo que es necesario disminuir los tiempos de cálculos utilizando para ello medios computacionales. (Moya, L.; Rojas, E., 2020)

Programación de la tabla para hallar una solución aproximada por el método de Runge Kutta 4

Ejercicio 3. Dada la EDO de primer orden Dada $y' - 2y + 4yx = 0$ y el problema de valor inicial $\mathrm{y}(0) = 1$, calcule la solución aproximada para un tiempo igual a 2, utilizando 10 pasos.

Para aplicar este método de RK4 se escribe la EDO de primer orden en forma explícita, como se muestra a continuación:

$$y' = f(x, y)$$

$$f(x, y) \;= (2 - 4x)y$$

$$y' = (2 - 4x)y$$

La función $f(x, y)$ está definido en el intervalo $x \in [a, b]$, el PVI $y(a) = y_a$, es $\mathrm{y}(0) = 1$, entonces se determinó el valor inicial de x, con $x_0 = a = 0$ y el valor inicial de y, con $y_0 = 1$, estos valores se marcan la tabla continuación con color amarillo.

Al conocer estos valores es posible hallar el valor del paso paso h, aplicando la expresion $h = \frac{x_f - x_0}{n}$, para lo cual es necesario conocer el valor del limite superior del intervalo que corresponde al valor del tiempo en el que se solicita calcular el valor de y, $x_f = b = 2$ y se marca en la tabla con color verde.

Entonces el valor del paso h es:

$$h = \frac{2 - 0}{10}$$

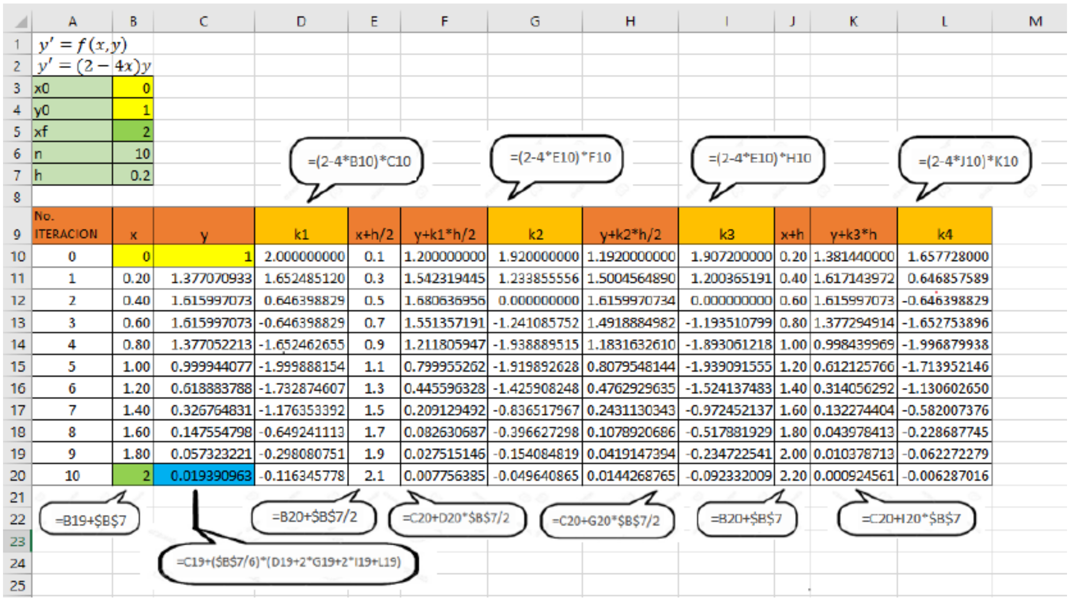
$$h = 0.2$$

Tabla 8. *Programación ejercicio 3 Método Runge Kutta 4 en Excel*

Etiqueta	Celda	Valor	Descripción
x_0	B3	0	x inicial, límite inferior del intervalo
y_0	B4	1	y inicial
x_f	B5	2	x final, límite superior del intervalo
n	B6	10	Número de pasos o iteraciones o repeticiones
h	B7	0.2	Tamaño de paso

Estos datos permitirán encontrar los valores de la tabla que se muestra a continuación:

Figura 24. *Resultados obtenidos de ejercicio 3 resulto por Runge Kutta 4 en excel*



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	$y' = f(x,y)$											
2	$y' = (2-4x)y$											
3	x0	0										
4	y0	1										
5	xf	2										
6	n	10										
7	h	0.2										
8												
9	No. ITERACION	x	y	k1	x+h/2	y+k1*h/2	k2	y+k2*h/2	k3	x+h	y+k3*h	k4
10	0	0	1	2.000000000	0.1	1.200000000	1.920000000	1.1920000000	1.907200000	0.20	1.381440000	1.657728000
11	1	0.20	1.377070933	1.652485120	0.3	1.542319445	1.233855556	1.5004564890	1.200365191	0.40	1.617143972	0.646857589
12	2	0.40	1.615997073	0.646398829	0.5	1.680636956	0.000000000	1.6159970734	0.000000000	0.60	1.615997073	-0.646398829
13	3	0.60	1.615997073	-0.646398829	0.7	1.551357191	-1.241085752	1.4918884982	-1.193510799	0.80	1.377294914	-1.652753896
14	4	0.80	1.377052213	-1.652462655	0.9	1.211805947	-1.938889515	1.1831632610	-1.893061218	1.00	0.998439969	-1.996879938
15	5	1.00	0.999944077	-1.999888154	1.1	0.799955262	-1.919892628	0.8079548144	-1.939091555	1.20	0.612125766	-1.713952146
16	6	1.20	0.618883788	-1.732874607	1.3	0.445596328	-1.425908248	0.4762929635	-1.524137483	1.40	0.314056292	-1.130602650
17	7	1.40	0.326764831	-1.176353392	1.5	0.209129492	-0.836517967	0.2431130343	-0.972452137	1.60	0.132274404	-0.582007376
18	8	1.60	0.147554798	-0.649241113	1.7	0.082630687	-0.396627298	0.1078920686	-0.517881929	1.80	0.043978413	-0.228687745
19	9	1.80	0.057323221	-0.298080751	1.9	0.027515146	-0.154084819	0.0419147394	-0.234722541	2.00	0.010378713	-0.062272279
20	10	2	0.019390963	-0.116345778	2.1	0.007756385	-0.049640865	0.0144268765	-0.092332009	2.20	0.000924561	-0.006287016

En esta tabla programada los valores que se deben cambiar en el caso de trabajo con una función $f(x, y)$ distinta reside en los valores de los parámetros $k1$, $k2$, $k3$ y $k4$,marcados de color naranja en la tabla, que son necesarias para encontrar el valor siguiente hasta llegar al punto $x = 2$, estos valores se encuentran en la tabla a continuacion verticalmente de la celda C10 que contiene el valor inicial de $y = 1$, desde la celda C11 hasta la celda C20, donde se encuentra marcado con azul el valor aproximado.

Tabla 9. *Características de programación de ejercicio 3 método Runge Kutta en Excel.*

Etiqueta en tabla	Celda	Ecuación Excel	Descripción
No. ITERACION	A10.. A20	=A10+1	Ya que se solicita que se usen 10 paso de inicia en 0 hasta 10
x	B10..B20	=B10+$B$7	$x = 0$ es el valor inicial, a partir del siguiente valor se debe sumar el valor del paso $h = 0.2$, hasta $x = 2$.
y	C10..C20	=C10+($B$7/6)*(D10+2*G10+2*I10+L10)	$y = 1$ es el valor inicial, a partir del siguiente se debe aplicar la formula:$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, hasta llegar a la iteración 10, el valor de i corresponde a y anterior.
$k1$	D10..D20	=(2-4*B10)*C10	El valor de $k_1 = f(x_i, y_i)$, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.
$x + h/2$	E10..E20	=B10+$B$7/2	Se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$y + k1 * h/2$	F10..F20	=C10+D10*$B$7/2	Se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$k2$	G10..G20	=(2-4*E10)*F10	El valor de $k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.
$y + k2 * h/2$	H10..H20	=C10+G10*$B$7/2	Se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$k3$	I10..I20	=(2-4*E10)*H10	El valor de $k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.
$x + h$	J10..J20	=B10+$B$7	Se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$y + k3 * h$	K10..K20	=C10+I10*$B$7	Se calcula este valor para cada paso como valor de i.
$k4$	L10..L20	=(2-4*J10)*K10	El valor de $k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$, donde el valor de i, corresponde al numero de fila del valor de x e y.

Ejercicio 4. Dada $5y' - 10y + 20yt = 0$ y $y(0) = 1$, calcule por Runge Kutta la solución aproximada (con nueve decimales) para $t = 2$, utilizando 10 pasos.

Se manipula algebraicamente la ecuación, se divide para 5 con el fin de simplificar la ecuación, entonces:

$$y' = (2 - 4t)y$$

Solución por el método de Runge Kutta:

Para hallar la solución aproximada por el método de Runge Kutta, se identifican los valores que se indican en el cuadro a continuación los valores marcados de color amarillo se desprende la con condición inicial y el valor final marcado de color verde es el valor del tiempo en el que se va a encontrar un valor de y: (García A., 2014)

***Tabla 10**. Programación ejercicio 4 por método Runge Kutta en Excel.*

t inicial	t_0	0
y inicial	y_0	1
t final	t_f	2
paso	h	0.2

El valor de paso se calculó considerando el valor inicial $y(0) = 1$, donde $t_0 = 0$ y $y_0 = 1$, como solicita calular el valor de y en un tiempo igual a 2, entonces el tiempo final es $t_f = 2$, se aplica la formula para calular el paso h.

$$\mathrm{h} = \frac{t_f - t_0}{n}$$

$$\mathrm{h} = \frac{2 - 0}{10}$$

$$\mathrm{h} = 0.2$$

Como se indicó en el apartado anterior los valores que se deben cambiar en la tabla programada del método de Runge Kutta, como se indica a continuación:

Tabla 11. *Características de ejercicio 4 por método Runge Kutta en Excel.*

Etiqueta en tabla	Celda	Comando	Descripción
k1	H9	=(2-4*F9)*G9	Cálculo de k1
k2	K9	=(2-4*I9)*J9	Cálculo de k2
k3	M9	=(2-4*I9)*L9	Cálculo de k3
k4	P9	=(2-4*N9)*O9	Cálculo de k4

La tabla resultante es la que se presenta a continuación:

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
7												
8	No. ITERACION	t	y	k1	t+h/2	y+k1*h/2	k2	y+k*2h/2	k3	x+h	y+k3*h	k4
9	0	0.00	1	2.000000000	0.1	1.200000000	1.920000000	1.1920000000	1.907200000	0.20	1.381440000	1.657728000
10	1	0.20	1.377070933	1.652485120	0.3	1.542319445	1.233855556	1.5004564890	1.200365191	0.40	1.617143972	0.646857589
11	2	0.40	1.615997073	0.646398829	0.5	1.680636956	0.000000000	1.6159970734	0.000000000	0.60	1.615997073	-0.646398829
12	3	0.60	1.615997073	-0.646398829	0.7	1.551357191	-1.241085752	1.4918884982	-1.193510799	0.80	1.377294914	-1.652753896
13	4	0.80	1.377052213	-1.652462655	0.9	1.211805947	-1.938889515	1.1831632610	-1.893061218	1.00	0.998439969	-1.996879938
14	5	1.00	0.999944077	-1.999888154	1.1	0.799955262	-1.919892628	0.8079548144	-1.939091555	1.20	0.612125766	-1.713952146
15	6	1.20	0.618883788	-1.732874607	1.3	0.445596328	-1.425908248	0.4762929635	-1.524137483	1.40	0.314056292	-1.130602650
16	7	1.40	0.326764831	-1.176353392	1.5	0.209129492	-0.836517967	0.2431130343	-0.972452137	1.60	0.132274404	-0.582007376
17	8	1.60	0.147554798	-0.649241113	1.7	0.082630687	-0.396627298	0.1078920686	-0.517881929	1.80	0.043978413	-0.228687745
18	9	1.80	0.057323221	-0.298080751	1.9	0.027515146	-0.154084819	0.0419147394	-0.234722541	2.00	0.010378713	-0.062272279
19	10	2.00	0.019390963	-0.116345778	2.1	0.007756385	-0.049640865	0.0144268765	-0.092332009	2.20	0.000924561	-0.006287016
20												

Figura 25. *Resultados obtenidos en ejercicio 4 por método Runge Kutta 4 en Excel.*

La solución aproximada se encuentra marcado con azul y es el valor de: 0.019390963

Solución analítica:

$$y' = (2 - 4t)y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{dt} = (2 - 4t)y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int (2 - 4t)\,\mathrm{d}t$$

$$\ln y = 2t - \frac{4t^2}{2} + C$$

$$\ln y = 2t - 2t^2 + C$$

$$e^{\ln y} = e^{(2t-2t^2+c)}$$

$$y = e^{2(t-t^2)} e^c$$

$$y = c e^{2(t-t^2)}$$

Para encontrar la solución particular, se aplica la condición del problema de valor inicial $y(0) = 1$.

Entonces cuando $t = 0$, $y = 1$.

$$1 = C e^{2(0-0^2)}$$

Entonces el vaor de $C = 1$, por lo tanto, la solucion particular es:

$$y = e^{2(t-t^2)}$$

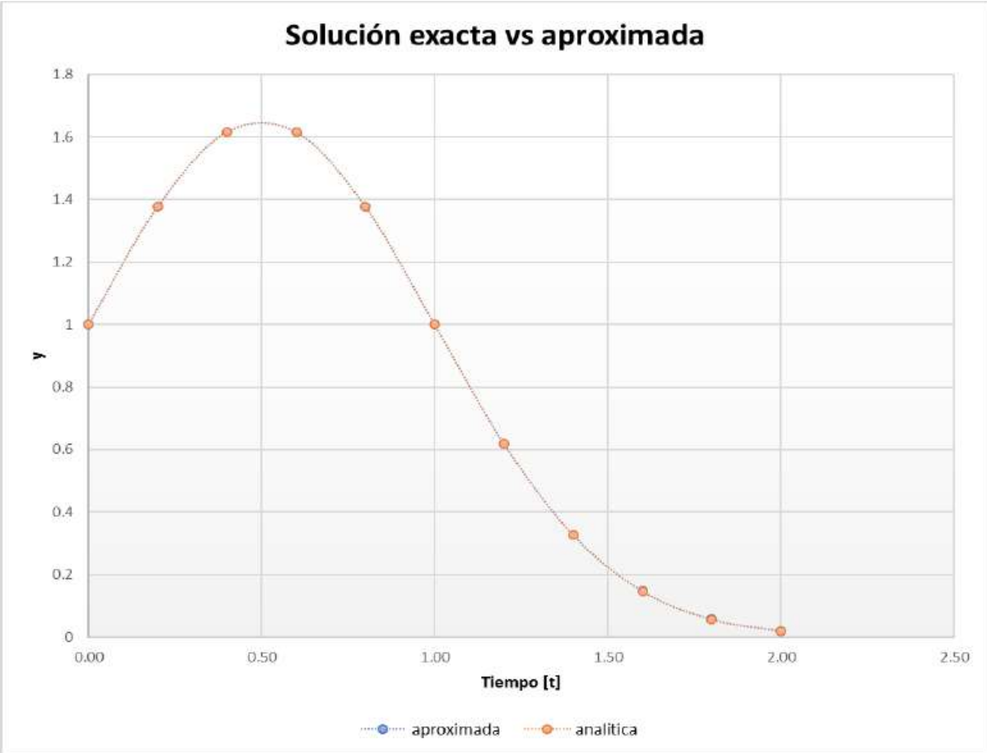
Los valores calculados con la solución particular se presentan en la tabla a continuación:

Tabla 12. *Resultados obtenidos en ejercicio 4 por solución analítica.*

t	y
0.00	1.0000000000
0.20	1.3771277643
0.40	1.6160744022
0.60	1.6160744022
0.80	1.3771277643
1.00	1.0000000000
1.20	0.6187833918
1.40	0.3262797946
1.60	0.1466069621
1.80	0.0561347628
2.00	0.0183156389

En la figura ase puede observar la gráfica de la solución aproximada obtenida por un método numérico y la solución analítica que se obtuvo por un método analítico.

Figura 26. *Resultados gráficos obtenido del ejercicio 4, comparación método Runge Kutta y analítica.*



CAPÍTULO 4

APLICACIONES EN INGENIERÍA

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) tienen una amplia aplicación en la ingeniería, ya que permiten modelar y analizar fenómenos dinámicos en diversos sistemas, las EDO son esenciales para describir cómo cambian ciertas variables con respecto al tiempo o a otras variables independientes. En ingeniería son herramientas fundamentales para entender y predecir el comportamiento de sistemas biológicos, agronómicos, mecánicos, eléctricos, térmicos y químicos, entre otros.

En la ingeniería mecánica, las EDO se utilizan para estudiar el movimiento de cuerpos bajo la acción de fuerzas, como en la dinámica de sistemas vibratorios, donde se modelan las oscilaciones de estructuras y máquinas. En ingeniería eléctrica, son clave para analizar circuitos eléctricos, ya que describen la relación entre corriente, voltaje, resistencia, inductancia y capacitancia, permitiendo el diseño de sistemas eficientes y estables.

Por otro lado, en ingeniería química y ambiental, las EDO se aplican para modelar procesos como la transferencia de calor y masa, las reacciones químicas y la dispersión de contaminantes en el medio ambiente. En conjunto, estas ecuaciones ofrecen herramientas matemáticas que ayudan a los ingenieros a optimizar procesos, mejorar diseños y resolver problemas complejos de la vida real.

Además, son esenciales en la modelización de sistemas de control y en la ingeniería de sistemas biológicos ya que estas ecuaciones permiten describir dinámicas complejas de organismos vivos y sus interacciones con el entorno, ayudando a entender procesos biológicos fundamentales y a diseñar estrategias para mejorar la salud humana, animal y ambiental.

Un ejemplo destacado es el modelado del crecimiento poblacional mediante ecuaciones diferenciales, como el modelo logístico, que describe cómo una población crece inicialmente de manera exponencial, pero se estabiliza debido a limitaciones de recursos. También se usan para modelar la propagación de enfermedades infecciosas que permite predecir la dinámica de una epidemia y evaluar estrategias de control.

En el ámbito fisiológico, las EDO se usan para estudiar procesos como la regulación del ritmo cardíaco, la dinámica de los potenciales de acción en las neuronas o el intercambio de gases en los pulmones. Además, en biotecnología, se aplican para modelar el crecimiento de cultivos celulares y la producción de metabolitos en biorreactores.

En agronomía, se utilizan ampliamente para modelar y comprender diversos procesos biológicos, físicos y químicos que ocurren en sistemas agrícolas, estas ecuaciones permiten predecir dinámicas complejas, optimizar recursos y mejorar la toma de decisiones en la producción agrícola.

En este ámbito, un ejemplo es el modelado del crecimiento de las plantas que pueden describir cómo varían la biomasa, el índice de área foliar o la absorción de nutrientes en función del tiempo, considerando factores como disponibilidad de luz, agua y nutrientes, también son útiles para modelar la dinámica del carbono en el suelo y estudiar cómo influyen las prácticas agrícolas en la captura de carbono.

En la protección de cultivos permiten analizar la dinámica de poblaciones de plagas y sus enemigos naturales. Modelos como los depredador-presa ayudan a desarrollar estrategias de manejo integrado de plagas y se puede estudiar la propagación de enfermedades en cultivos y diseñar estrategias de control, como el uso de fungicidas o prácticas culturales.

Además, en la gestión del agua para modelar procesos hidrológicos, como la infiltración, la evaporación y el drenaje, ayudando a optimizar el riego y mejorar la sostenibilidad en la agricultura.

Finalmente, en los sistemas financieros para la modelización y análisis de diversos fenómenos relacionados con los mercados financieros, la gestión de riesgos y la valoración de activos, para describir cómo cambian las variables financieras a lo largo del tiempo, facilitando la toma de decisiones estratégicas.

A continuación, se presentan algunos ejemplos aplicativos de las EDO de primer orden en algunas ramas de ingeniería

Ley de Fourier de la transferencia de calor

Las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se aplican en la transferencia de calor por conducción para describir cómo varía la temperatura a través de las paredes aislantes, basándose en la Ley de Fourier. En este contexto, el flujo de calor Q viene dado por la ecuación:

$$Q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

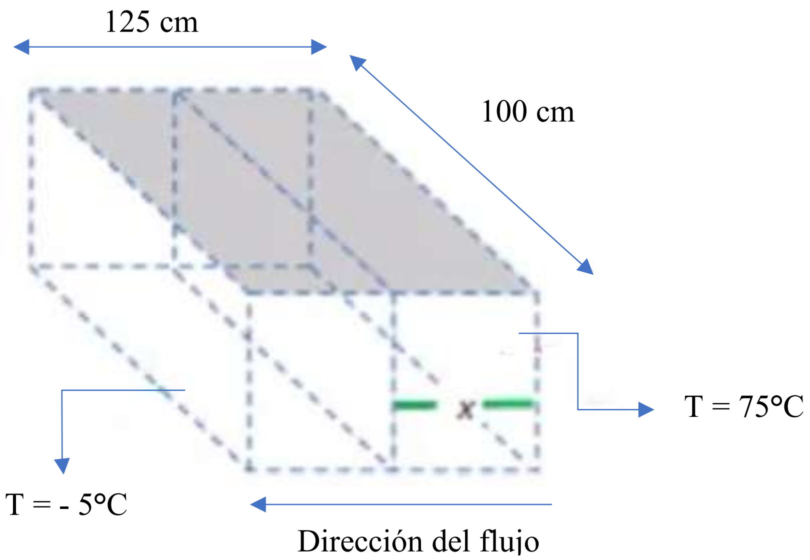
Donde:

$Q\left[\frac{cal}{\mathrm{s}}\right]$, son las calorias

$k\left[\frac{Kcal}{\mathrm{h}\cdot m\cdot K}\right]$, es la conductividad del material

$A[m^2]$, es la superficie perpendicular a la pared

Ejemplo de aplicación: En un procesadora de pollos se tiene un cuarto frio para el almacenaje antes de la comercialización del pollo, para mantener los estándares de calidad preservando la cadena de frío, para esto es importante en la conservación por refrigeración enfriarlos de 4 a 6 $°C$ (42 grados F), para reducir la actividad bacteriana. Si la temperatura de a cara interior es de $-5\ °C$ y la de la cara exterior es de $75\ °C$, hallar el número de calorías por hora del calor que pasa a través de 1 m^2 de la pared de la habitación frigorífica de $125\ cm$ de espesor y de $k = 0.0025\ [Kcal/\mathrm{h}\cdot m\cdot K]$. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)



De los datos expuestos del planteamiento se sabe que: $A = 1\mathrm{m}^2$y de las condiciones iniciales: $T(0) = 75\ °C$, además se conoce por los datos que: $T(125) = -5\ °C$.

De la ley de transferencia de calor se sabe que:

$$Q = -kA\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

Se integra ambos lados de la ecuación y se aplica separación de variables para resolver la EDO:

$$\int \frac{Q\,\mathrm{d}x}{-kA} = \int \mathrm{dT}$$

Se puede observar que la temperatura depende del calor. Entonces la solución general es:

$$-\frac{Qx}{kA} + C = T(x)$$

Para encontrar la solución particular se aplican las condiciones iniciales $T(0) = 75\ °C$, entonces: $x_0 = 0$ y $T_0 = 75$.

$$\mathrm{T}(0) = -\frac{Q(0)}{kA} + C$$

Por lo que $C = 75$, con lo que la solucion particular es:

$$T(x) = -\frac{Qx}{kA} + 75$$

Para hallar la cantidad de calorías por hora del calor que atraviesa la pared, se consideran los datos $T(125) = -5\ °C$, entonces $1.25\ m = x = 125\ cm$, pero como el coeficiente de conductivada se encuentra expresado en metros se toma en consideracion este particular para realizar los calculos $x = 1.25\ m$ y $\mathrm{T} = -5\ °\mathrm{C}$.

$$T(1.25) = -\frac{Q(1.25\ \mathrm{m})}{\left(0.0025\frac{Kcal}{\mathrm{h}\cdot m\cdot K}\right)(1\mathrm{m}^2)} + 75\ °C$$

Al mismo tiempo por lo anterior antes mencionado se debe transformar de $°C$ a K, entontes:

$$(75 + 273.15)°\mathrm{C} = 348.15\ K$$

$$(-5 + 273{,}15)°\mathrm{C} = 268.15\ \mathrm{K}$$

$$268{,}15K = -\frac{Q(1.25\,m)}{0.0025\,\frac{m \cdot Kcal}{\mathrm{h} \cdot K}} + 348.15K$$

$$(268.15 - 348{,}15)\mathrm{K} = Q\left(\frac{1.25}{0.0025}\right)\frac{\mathrm{h} \cdot K}{Kcal}$$

$$Q = \frac{-80\ \mathrm{Kcal}}{-500\ \mathrm{h}}$$

Entonces las cantidades de calorías que atraviesa la pared cada hora es:

$$Q = 0{,}16\ \frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{h}}$$

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton describe cómo un cuerpo pierde calor hacia su entorno en función de la diferencia de temperatura entre ambos, la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo (T) y la temperatura del entorno (T_a). Matemáticamente, se expresa como:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T_c - T_a)$$

Donde (k) es una constante de proporcionalidad que depende de las propiedades del cuerpo y del medio.

Esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden es ampliamente utilizada para modelar procesos de enfriamiento o calentamiento en sistemas donde la transferencia de calor se realiza predominantemente por convección. También, otras aplicaciones comunes incluyen el análisis de la disipación de calor en dispositivos electrónicos, el enfriamiento de alimentos y el diseño de sistemas térmicos eficientes.

Ejemplo de aplicación: Una persona es encontrada muerta en la habitación de una clínica particular en la ciudad de Riobamba, a las 07H00. El cuerpo encontrado en una habitación la misma que conserva una temperatura constante de 23ºC, en ese instante la temperatura del cuerpo es de 25ºC y luego de dos horas la temperatura es de 28ºC. Se considera que la persona en el momento de su muerte tenía una temperatura de 37ºC y según la ley de enfriamiento de Newton el cuerpo ha disminuido su temperatura. ¿A qué hora murió esta persona?

Aplicamos la ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = -k(T_c - T_a)$ (1)

Donde:

$\frac{dT}{dt} = Representa\ la\ variación\ de\ la\ temperatura\ con\ respecto\ al\ tiempo\ t$

$T_c = Temperatura\ del\ cuerpo$

$T_a = Temperatura\ de\ la\ habitación$

$t = tiempo\ en\ horas$

Datos del problema:

$T_a = 23ºC$

La temperatura del cuerpo cuando fue hallado es de 25ºC, por lo tanto, allí se genera un tiempo igual a t_1, es decir $T(t_1)$ =25ºC

Luego de dos horas se genera $T(t_1 + 2)$ =28ºC

De la expresión (1), despejamos y obtenemos:

$$\frac{dT}{(T_c - T_a)} = -Kdt$$

Integramos ambos lados de la ecuación diferencial:

$$\int \frac{dT}{(T_c - T_a)} = \int -Kdt$$

$$ln(T_c - 23) = -Kt + C$$

Aplicamos propiedades de logaritmos para despejar T_c:

$$(T_c - 23) = Ce^{-Kt}$$

$T_c(t) = Ce^{-Kt} + 23$ (2) temperatura del cuerpo

Luego, $T_0 = 37ºC$ esto como valor o temperatura inicial

$$37 = Ce^{-K0} + 23$$

$$37 = C + 23$$

$$C = 14$$

Reemplazamos en la expresión (2): $T_c(t) = 14e^{-Kt} + 23$ (3)

Para encontrar el valor de la constante K, utilizamos la temperatura en el tiempo 1, es decir $T(t_1)$ =25ºC, esto en la expresión (3)

$$25 = 14e^{-Kt_1} + 23$$

$$e^{-Kt_1} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

A través de las propiedades de logaritmos, obtenemos:

$$-Kt_1 = \ln\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$Kt_1 = 1.945$$

$$K = \frac{1.945}{t_1} \quad (4)$$

Ahora consideramos la temperatura luego de las dos horas $T(t_1 + 2)$ =28ºC

$$28 = 14e^{-K(t_1+2)} + 23$$

Igual que el proceso anterior encontramos el segundo valor de K

$$e^{-K(t_1+2)} = \frac{5}{14}$$

A través de las propiedades de logaritmos, obtenemos:

$$-K(t_1 + 2) = \ln\left(\frac{5}{14}\right)$$

$$K(t_1 + 2) = 1.029$$

$$K = \frac{1.029}{t_1+2} \quad (5)$$

Igualamos las expresiones 4 y 5: $\frac{1.945}{t_1} = \frac{1.029}{t_1+2}$

Donde $t_1 = 4.25$, es decir que la persona falleció hace 4.25 horas es decir aproximadamente a las 02:45 am.

Ejemplo de aplicación: La ciudad de Riobamba es conocida como una de las más frías en el Ecuador, considerando que se sirve una taza de café caliente que inicialmente se encuentra a 100ºC, se enfría y llega a 70ºC en 5 minutos mientras permanece servida en un cuarto cuya temperatura está a 12ºC.

Determine en qué momento el café estará a la temperatura ideal de 50ºC.

Aplicamos la ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = K(T_c - T_a)$ (1)

Donde:

$\frac{dT}{dt} = Representa\ la\ variación\ de\ la\ temperatura\ con\ respecto\ al\ tiempo\ t$

$T_c = Temperatura\ del\ café$

$T_a = Temperatura\ de\ la\ habitación$

$t = tiempo\ en\ horas$

Datos del problema:

$T_a = 12$ºC

La temperatura del café luego de 5 minutos es de 70ºC, por lo tanto, allí se genera un tiempo igual a t_5, es decir $T(t_5)$ =70ºC

Además, sabemos que la temperatura inicial $T_0 = 100ºC$

Luego de aplicar los mismos pasos que el ejercicio anterior, obtenemos:

$$T_c(t) = Ce^{Kt} + T_a \qquad (2)$$

$$T_c(t) = Ce^{Kt} + 12$$

Si consideramos $T_0 = 100ºC$

$$T_c(0) = Ce^{K0} + 12$$

$$100 = C + 12$$

$$C = 88$$

$$T_c(t) = 88e^{Kt} + 12 \qquad (3)$$

Tomamos, $T(t_5)$ =70ºC70-127

$$70 = 88e^{5K} + 12$$

$$e^{5K} = \frac{58}{88}$$

$$5K = \ln\left(\frac{58}{88}\right)$$

$$K = -0.083 \qquad (4)$$

En (3), reemplazamos la temperatura ideal 50ºC como un tiempo 1.

$$50 = 88e^{-0.057t_1} + 12$$

$$t_1 = \frac{\ln\left(\frac{38}{88}\right)}{-0.083} = 10.12$$

Es decir que aproximadamente, pasado los 10 minutos el café tendrá una temperatura ideal de 50ºC.

Solución en OCTAVE:

```
% Datos del problema
Ta = 12;    % Temperatura ambiente en grados Celsius
T0 = 100;   % Temperatura inicial del café en grados Celsius
Tf = 50;    % Temperatura ideal del café en grados Celsius
delta_t = 5; % Tiempo en minutos en el que el café se enfría de 100°C a 70°C

% Calcular la constante de enfriamiento k
k = -1/delta_t * log((70 - Ta) / (T0 - Ta));

% Calcular el tiempo necesario para que el café alcance 50°C
t = -1/k * log((Tf - Ta) / (T0 - Ta));

% Mostrar los resultados
disp(['La constante de enfriamiento k es aproximadamente ', num2str(k)]);
disp(['El tiempo necesario para que el café alcance 50°C es de aproximadamente ', num2str(t), ' minutos.']);
```

Resultado:

```
La constante de enfriamiento k es aproximadamente 0.083379
El tiempo necesario para que el café alcance 50°C es de aproximadamente 10.0715 minutos.
```

Vaciado de tanques

El modelo que describe el vaciado de un tanque se basa en la ley de Torricelli, que establece que el flujo de salida de un líquido desde un recipiente es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del líquido en el tanque. Esta ley se deriva de principios de conservación de la energía y de la dinámica de fluidos, y es similar a la ecuación de la velocidad de escape de un fluido en un orificio. Se expresa como:

$$Q = C_d A\sqrt{2gh}$$

Donde:

Q es el flujo de salida del líquido (volumen por unidad de tiempo),

C_d es un coeficiente de descarga (que depende de las características del orificio),

A es el área del orificio,

g es la aceleración debida a la gravedad, y

h es la altura del líquido en el tanque.

El principio detrás de esta ley es que la presión en el fondo del tanque, que está proporcional a la altura del líquido ($P = \rho gh$, donde ρes la densidad del líquido), impulsa el fluido hacia afuera a través del orificio. La ecuación diferencial que modela el vaciado se deriva al relacionar el flujo de salida (Q) con el cambio en el volumen del tanque, lo que da como resultado una relación de la forma:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

Donde k es una constante que depende de las propiedades del orificio y el líquido, al resolver esta EDO permite predecir cómo disminuirá la altura del líquido en función del tiempo durante el vaciado del tanque.

Ejemplo de aplicación: Se tiene un tanque de almacenamiento de agua de fondo cónico, este debido a su base cónica tiene un drenaje total lo que ayuda a eliminar el crecimiento de bacterias ya que no se acumulan dentro del tanque. El líquido fluye del fondo del tanque cónico invertido por un orificio circular en el fondo a razón de:

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi {r_0}^2 \frac{\sqrt{2gx}}{A(x)}$$

Considere $r_0 = 3\,mm$ es el radio del orificio, $x(t)$ es la altura de la superficie del líquido desde el vértice del cono en cierto tiempo (en segundos). $A(x)$, es el área transversal del tanque en cierta altura. Considere un volumen inicial de $V_0 = 60\pi\ m^3$ y una altura inicial del líquido es de 3 m y la gravedad $g = 9.8\ \frac{m}{s^2}$. Hallar el nivel del líquido al cabo de 10 días (h = 18000). (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Solución:

De planteamiento se sabe que: $x(0) = 3\ m$, y se sabe que el volumen del cono es $v_0 = \frac{1}{3}\pi R^2 3$, con esrros datos se calcula el valor de R, si se igualan estas dos ecuaciones.

$$60\pi = \pi R^2$$

$$\mathrm{R} = \sqrt{60}$$

Por semejanzas se obtiene:

$$\frac{r}{\sqrt{60}} = \frac{x}{3}$$

Con este valor se obtiene el área transversal:

$$A(x) = \pi r^2 = \frac{20}{3}\pi x^2$$

Entonces la ecuación que representa el vacía del tanque es:

$$\frac{dx}{dt} = -0.6\pi {r_0}^2 \frac{\sqrt{2gx}}{\frac{20}{3}\pi x^2}$$

Para simplificar la EDO, se considera a $b = -0.6\pi {r_0}^2 \frac{\sqrt{2g}}{20\frac{\pi}{3}}$, entonces:

$$x'(t) = b\frac{\sqrt{x}}{(x)^2}$$

Como se puede observar se trata de una EDO de primer orden, se propone resolver por el método numérico de Euler.

Es importante considerar que la gravedad se mide en $\frac{m}{s^2}$ por lo que se debe transformar los días segundos.

Para resolver por el método de Euler se realiza mediante la figura 21 programa que se describió en el apartado de Euler, el valor que se debe cambiar se representa a $f(x, y)$ y se encuentra en la celda marcado con naranja.

Figura 27. *Soluciones de ejercicio aplicativo 4 en Excel.*

	A	B	C	D	E	F
1		b	-3.58602E-06			
2		t0	0			
3		x0	3			
4		tf	864000			
5		h	18000			
6		n	48			
7						
8			=C11+$C$5	=D9+$C$5*E9	=$C$1*D11^(-3/2)	
9						
10		No. ITERACION	t	x	f(x,y)	
11		0	0	3.000000000	-6.90E-07	
12		1	18000	2.987577652	-6.94E-07	
13		2	36000	2.975077746	-6.99E-07	
14		3	54000	2.962498979	-7.03E-07	
15		4	72000	2.949840013	-7.08E-07	

En la tabla 12 a continuación se presenta, el desarrollo completo, donde se puede observar que el valor aproximado en 10 días es: 2.283036379

Tabla 13. *Desarrollo de iteraciones método numérico de ejercicio aplicativo 4.*

No. ITERACION	t	x	f(x,y)
0	0	3.000000000	-6.90E-07
1	18000	2.987577652	-6.94E-07
2	36000	2.975077746	-6.99E-07
3	54000	2.962498979	-7.03E-07
4	72000	2.949840013	-7.08E-07
5	90000	2.937099472	-7.12E-07
6	108000	2.924275942	-7.17E-07
7	126000	2.911367970	-7.22E-07
8	144000	2.898374058	-7.27E-07
9	162000	2.885292667	-7.32E-07
10	180000	2.872122213	-7.37E-07
11	198000	2.858861063	-7.42E-07
12	216000	2.845507536	-7.47E-07
13	234000	2.832059900	-7.52E-07
14	252000	2.818516369	-7.58E-07
15	270000	2.804875102	-7.63E-07
16	288000	2.791134199	-7.69E-07
17	306000	2.777291701	-7.75E-07
18	324000	2.763345583	-7.81E-07
19	342000	2.749293758	-7.87E-07
20	360000	2.735134064	-7.93E-07
21	378000	2.720864273	-7.99E-07
22	396000	2.706482076	-8.05E-07
23	414000	2.691985086	-8.12E-07
24	432000	2.677370834	-8.19E-07

25	450000	2.662636763	-8.25E-07
26	468000	2.647780223	-8.32E-07
27	486000	2.632798469	-8.39E-07
28	504000	2.617688654	-8.47E-07
29	522000	2.602447826	-8.54E-07
30	540000	2.587072919	-8.62E-07
31	558000	2.571560749	-8.70E-07
32	576000	2.555908008	-8.78E-07
33	594000	2.540111259	-8.86E-07
34	612000	2.524166922	-8.94E-07
35	630000	2.508071275	-9.03E-07
36	648000	2.491820437	-9.12E-07
37	666000	2.475410367	-9.21E-07
38	684000	2.458836847	-9.30E-07
39	702000	2.442095477	-9.40E-07
40	720000	2.425181661	-9.50E-07
41	738000	2.408090595	-9.60E-07
42	756000	2.390817255	-9.70E-07
43	774000	2.373356381	-9.81E-07
44	792000	2.355702462	-9.92E-07
45	810000	2.337849721	-1.00E-06
46	828000	2.319792094	-1.01E-06
47	846000	2.301523213	-1.03E-06
48	864000	2.283036379	-1.04E-06

A más del método numérico se desarrolla mediante un método analítico, como se puede observar se puede aplicar el método por separación de variables:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2}$$

$$\frac{dx}{\mathrm{d}t} = bx^{-3/2}$$

Se integra ambas partes:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^{-3/2}} = \int b\,\mathrm{d}t$$

La solución general es:

$$x^{5/2} = \frac{5}{2}b\mathrm{t} + C$$

Para obtener la solución particular se aplica la condición inicial: $x(0) = 3$, entonces, $t = 0$ y $x = 3$, por lo tanto $3^{5/2} = C$. La soucion paticular es:

$$x(t) = \left(\frac{5}{2}bt + 3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$x(t) = \left(\frac{5(-3.59x10^{-6})}{2}t + 3^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}$$

la tabla de valores calculados por la solución analítica se presenta en la tabla a continuación, como se puede observar el valor exacto es: 2.279213909.

Tabla 14. *Desarrollo de iteraciones solución analítica de ejercicio aplicativo 4.*

ITERACION	t	x
0	0	3.000000000
1	18000	2.987538859
2	36000	2.974999263
3	54000	2.962379879
4	72000	2.949679341
5	90000	2.936896240
6	108000	2.924029130
7	126000	2.911076523
8	144000	2.898036886
9	162000	2.884908643
10	180000	2.871690169
11	198000	2.858379791
12	216000	2.844975786
13	234000	2.831476377
14	252000	2.817879730
15	270000	2.804183956
16	288000	2.790387103
17	306000	2.776487158
18	324000	2.762482039
19	342000	2.748369599
20	360000	2.734147615
21	378000	2.719813790
22	396000	2.705365748
23	414000	2.690801029
24	432000	2.676117086

25	450000	2.661311281
26	468000	2.646380877
27	486000	2.631323041
28	504000	2.616134829
29	522000	2.600813186
30	540000	2.585354941
31	558000	2.569756797
32	576000	2.554015325
33	594000	2.538126960
34	612000	2.522087987
35	630000	2.505894538
36	648000	2.489542581
37	666000	2.473027911
38	684000	2.456346135
39	702000	2.439492668
40	720000	2.422462716
41	738000	2.405251262
42	756000	2.387853054
43	774000	2.370262589
44	792000	2.352474095
45	810000	2.334481513
46	828000	2.316278477
47	846000	2.297858291
48	864000	2.279213909

En la figura 28 se representa tanto la solución analítica como la aproximada del problema.

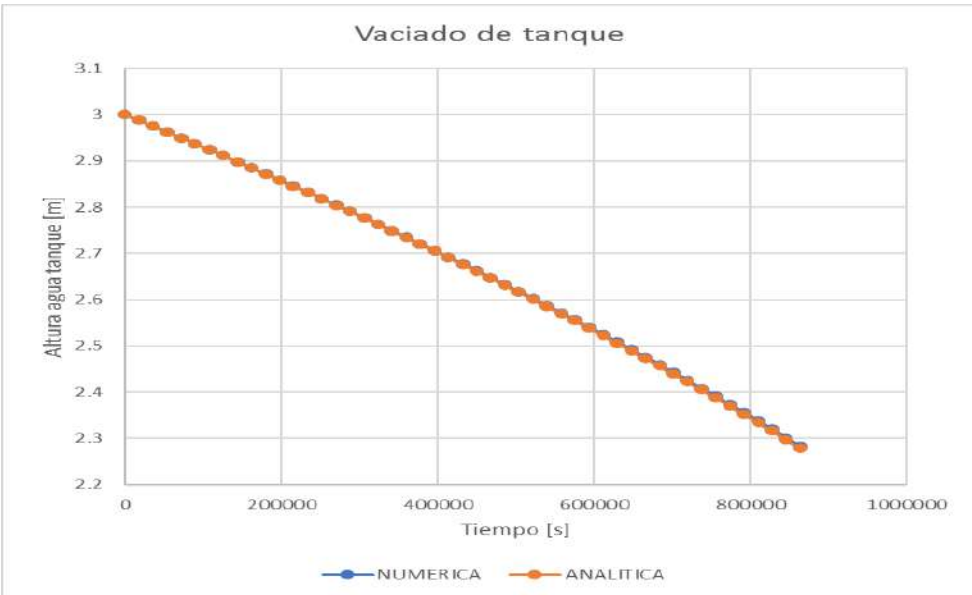


Figura 28. *Resolución gráfica de ejercicio aplicativo 4, comparativa entre resolución numérica y analítica.*

Temperatura de suelo

En la agricultura la temperatura del suelo afecta directamente la germinación de las semillas, el crecimiento de las raíces, la actividad microbiana en el suelo y la disponibilidad de nutrientes para las plantas. Una temperatura del suelo adecuada favorece el desarrollo saludable de las plantas, mientras que temperaturas extremas pueden inhibir el crecimiento de las raíces y reducir la absorción de nutrientes, lo que puede afectar negativamente el rendimiento del cultivo, monitorearla es fundamental para tomar decisiones informadas sobre la gestión agrícola y optimizar la producción de cultivos. (Chapra, S.; Canale, R., 2015)

Ejercicio de aplicación: El ejemplo propone predecir la temperatura de suelo a diferentes profundidades en un cultivo de trigo en un día en el que la temperatura ambiente es de 20 °C, en la superficie la temperatura de suelo es de 19.5°C, se sabe que la temperatura del suelo a una profundidad de 10 cm es de 18 °C. Hallar la temperatura del suelo a una profundidad de 5 cm.

Solución:

La solución del problema se plantea en base a la ley del enfriamiento de Newton donde la temperatura (T) depende de la profundad del suelo (z), por lo tanto:

$$\frac{dT}{dz} = k(T - Ta)$$

Al aplicar el método analítico separación de variables se obtiene la solución general:

$$T(z) = Ce^{\mathrm{kz}} + Ta$$

Donde Ta es la constante temperatura de ambiente medida en °C, T la temperatura en °C y z la variable independiente medido en cm.

De planteamiento se sabe que: $T(0) = 19.5$ °C, y se sabe que la temperatura ambiente es $T_a = 20$ °C, con estos datos se calcula el valor de la constante C.

$$\mathrm{z} = 0$$

$$\mathrm{T}(0) = 19.5$$

Entonces:

$$T(0) = Ce^{\mathrm{k}(0)} + 20$$

De este proceso se estima que el valor de

$C = -0.5$, de lo cual:

$$T(z) = -0.5e^{kz} + 20$$

Para obtener el valor de la constante k, se consideran los valores cuando la profundidad de 10 cm es de 18 °C, entonces:

$$z = 0$$

$$T(0) = 19.5$$

Al realizar los respectivos reemplazos.

$$T(10) = -0.5e^{k(10)} + 20$$

$$18 = -0.5e^{k(10)} + 20$$

$$k = 0.1386$$

Con este valor se plantea la solución particular de la siguiente manera:

$$T(z) = -0.5e^{0.1386z} + 20$$

Como se puede observar se trata de una EDO de primer orden, se propone resolver por el método numérico de Heun. Entonces

$$f(z,T) = \frac{dT}{dz} = 0.1386(T - 20)$$

la tabla de valores calculados por la solución analítica se presenta en la tabla a continuación, como se puede observar el valor exacto es: 19.0001472.

***Tabla 15**. Desarrollo de iteraciones solución analítica de ejercicio.*

z	T
0	19.5000000
1	19.4256677
2	19.3402849
3	19.2422086
4	19.1295519
5	19.0001472

Para resolver por el método de Heun se realiza mediante la figura 29 programa que se describió en el apartado de Heun, el valor que se debe cambiar se representa a $f(z,T) = \frac{dT}{dz} = 0.1386(T-20)$es la ecuación diferencial planteada y se encuentra en la celda marcado con naranja.

***Figura 29**29. Soluciones aproximadas por el método de Heun en Excel.*

x0	0
y0	19.5
Xf	5
h	1

=0.1386*(D9-20)

=E9*$C$5

=0.1386*(H9-20)

=(E9+I9)/2

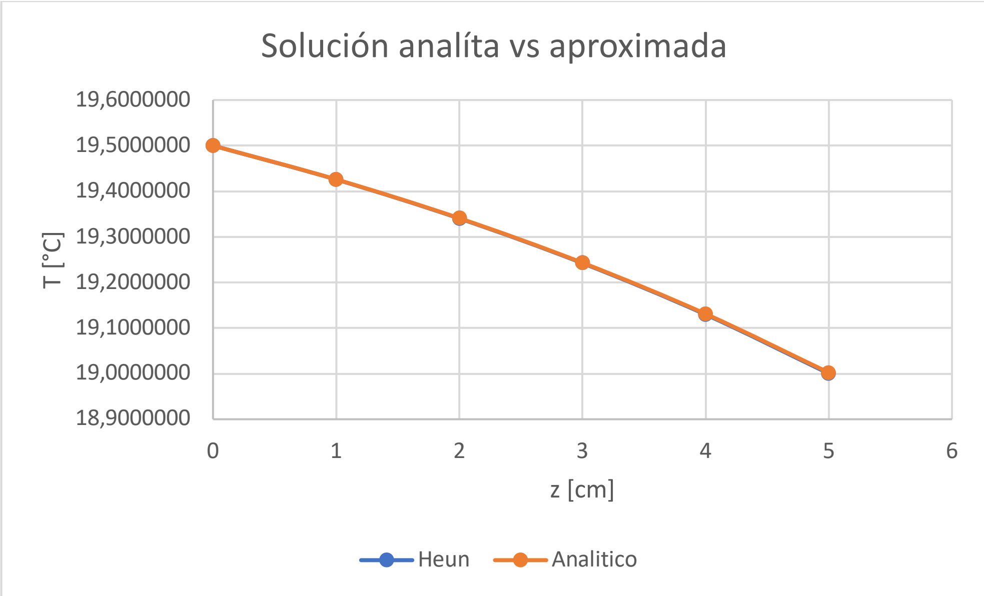
ITERACION	zn	Tn	f(zn,Tn)	h*f(zn,Tn)	zn+h	Tn+zn+h	f(zn+1,Tn+1)	f(z,T)prom	h*f(z,T)prom
0	0	19.50000000	-0.0693	-0.0693	1	19.4307	-0.07890498	-0.07410249	-0.07410249
1	1	19.42589751	-0.07957061	-0.07957061	2	19.3463269	-0.09059909	-0.085084848	-0.08508485
2	2	19.34081266	-0.09136337	-0.09136337	3	19.24944930	-0.10402633	-0.09769485	-0.09769485
3	3	19.24311782	-0.10490387	-0.10490387	4	19.13821394	-0.11944355	-0.11217371	-0.11217371
4	4	19.13094411	-0.12045115	-0.12045115	5	19.01049296	-0.13714568	-0.12879841	-0.12879841
5	5	19.00214570	-0.13830261	-0.13830261	6	18.86384309	-0.15747135	-0.14788698	-0.14788698

Solución aproximada

En la figura 30 se puede observar el desarrollo completo, donde el valor aproximado en 5 cm de profundidad: 19.00214570.

Además, en la figura 31 se representa tanto la solución analítica como la aproximada del problema como se puede observar son muy similares por lo tanto el error es mínimo.

Figura 3030. *Solución gráfica comparativa entre resolución numérica y analítica de la temperatura de suelo según profundidad.*



Solución en OCTAVE:

Código para resolver este problema usando el método de Heun:

```
% Parámetros y condiciones iniciales
z1 = 0; % Profundidad en cm
T1 = 19.5; % Temperatura a la profundidad z1 en grados Celsius
z2 = 10; % Profundidad en cm
T2 = 18; % Temperatura a la profundidad z2 en grados Celsius

% Profundidad a la que queremos encontrar la temperatura
z = 5;

% Solución usando interpolación lineal
T = T1 + (T2 - T1) / (z2 - z1) * (z - z1);

% Mostrar resultado
fprintf('La temperatura a una profundidad de %.1f cm es de %.2f °C.\n', z, T);
```

Figura 3131. Código para resolver este problema usando el método de Heun

Resultado:

```
La temperatura a una profundidad de 5.0 cm es de 18.75 °C.
```

Propagación de enfermedades en plantas

La estimación de la propagación de una enfermedad en las plantas permite a los agricultores y científicos prevenir y controlar brotes antes de que causen daños significativos a los cultivos. Entender cómo se propaga una enfermedad en las plantas ayuda a desarrollar estrategias de manejo más efectivas, como la selección de variedades resistentes o la implementación de prácticas de cultivo que reduzcan la propagación. Esto no solo protege la seguridad alimentaria, sino que también promueve la sostenibilidad agrícola al reducir la necesidad de pesticidas y otros tratamientos químicos.

Ejercicio de aplicación: Se requiere predecir cuantas plantas de un cultivo de tomate estarán infectadas en un invernadero con el virus de la hoja amarilla, donde su tasa de infección de la enfermedad es $\beta=0.3$ y su tasa de recuperación es de $\alpha=0.1$ por día. Además, se sabe que, en el momento inicial, hay 10 plantas infectadas, ¿cuántas plantas enfermas habrá al cabo de tres días?

Solución:

La solución del problema se plantea en base a la propagación de enfermedades donde la cantidad de plantas enfermas (I) depende del tiempo (t), por lo tanto:

$$\frac{dI}{\mathrm{d}t} = \beta \mathrm{I} - \alpha I$$

De esta expresión se puede deducir que:

$$\frac{dI}{\mathrm{d}t} = (\beta - \alpha)I$$

Al aplicar el método analítico separación de variables se obtiene la solución general:

$$I(t) = Ce^{(\beta-\alpha)\mathrm{t}}$$

Donde$(\beta - \alpha) = (0.3 - 0.1) = 0.2$ es la constante con la que determina la propagación de la enfermedad, I es la cantidad de plantas enfermas y t la variable independiente tiempo medido en días.

De planteamiento se sabe que: $I(0) = 10$, con estos datos se calcula el valor de la constante C.

$$\mathrm{t} = 0$$

$$\mathrm{I}(0) = 10$$

Entonces:

$$I(0) = Ce^{0.2(0)}$$

$$10 = Ce^{0.2(0)}$$

De este proceso se estima que el valor de $\mathrm{C} = 10$, de lo cual se obtiene la solución particular:

$$I(t) = 10e^{0.2\mathrm{t}}$$

Como se puede observar se trata de una EDO de primer orden, se propone resolver por el método numérico de Runge Kutta. Entonces

$$f(t, I) = \frac{dI}{\mathrm{d}t} = 0.2I$$

La tabla de valores calculados por la solución analítica se presenta en la tabla a continuación, como se puede observar el valor exacto es: 18.2211880.

Tabla 16. *Desarrollo de iteraciones solución analítica de ejercicio.*

z	I
0	10.0000000
0.50	11.0517092
1.00	12.2140276
1.50	13.4985881
2.00	14.9182470
2.50	16.4872127
3.00	18.2211880

Para resolver por el método de Runge Kutta se realiza mediante la figura 32, el valor que se debe cambiar se representa a $f(t, I) = \frac{dI}{\mathrm{d}t} = 0.2I$ es la ecuación diferencial planteada y se encuentra en la celda marcado con naranja.

Figura 3232. *Soluciones aproximadas por el método de Runge Kutta en Excel.*

x0	0.00
y0	10.00
Xf	3.00
h	0.50

=0.2*C8

=0.2*F8

=0.2*H8

=0.2*C8

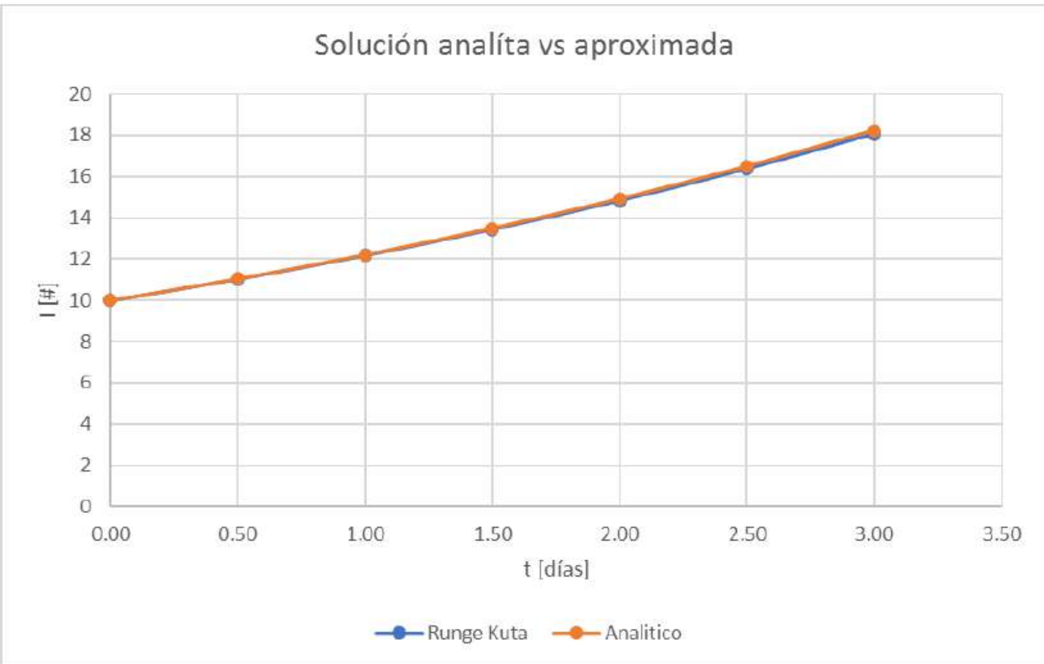
ITERACION	t	I	k1	t+h/2	I+k1h/2	k2	I+k2h/2	k3	t+h	I+k3h	k4
0	0.00	10	2.000000000	0.25	10.5	2.100000	10.525	2.10500000	0.50	11.0525	2.00000000
1	0.50	11.03416667	2.206833333	0.75	11.585875	2.317175	11.6134604	2.32269208	1.00	12.19551271	2.20683333
2	1.00	12.17528340	2.435056681	1.25	12.7840476	2.5568095	12.8144858	2.56289716	1.50	13.45673198	2.43505668
3	1.50	13.43441063	2.686882126	1.75	14.1061312	2.8212262	14.1397172	2.82794344	2.00	14.84838235	2.68688213
4	2.00	14.82375259	2.964750519	2.25	15.5649402	3.112988	15.6019996	3.12039992	2.50	16.38395255	2.96475052
5	2.50	16.35677567	3.271355135	2.75	17.1746145	3.4349229	17.2155064	3.44310128	3.00	18.07832631	3.27135513
6	3.00	18.04833889	3.609667778	3.25	18.9507558	3.7901512	18.9958767	3.79917534	3.50	19.94792656	3.60966778

Solución aproximada

En la figura 33 se puede observar el desarrollo completo, donde el valor aproximado después de 3 días es: 18.04833889.

Además, se representa tanto la solución analítica como la aproximada del problema como se puede observar son muy similares por lo tanto el error es mínimo.

Figura 3333. *Solución gráfica comparativa entre resolución numérica y analítica del número de plantas enfermas con el tiempo.*



Solución en OCTAVE:

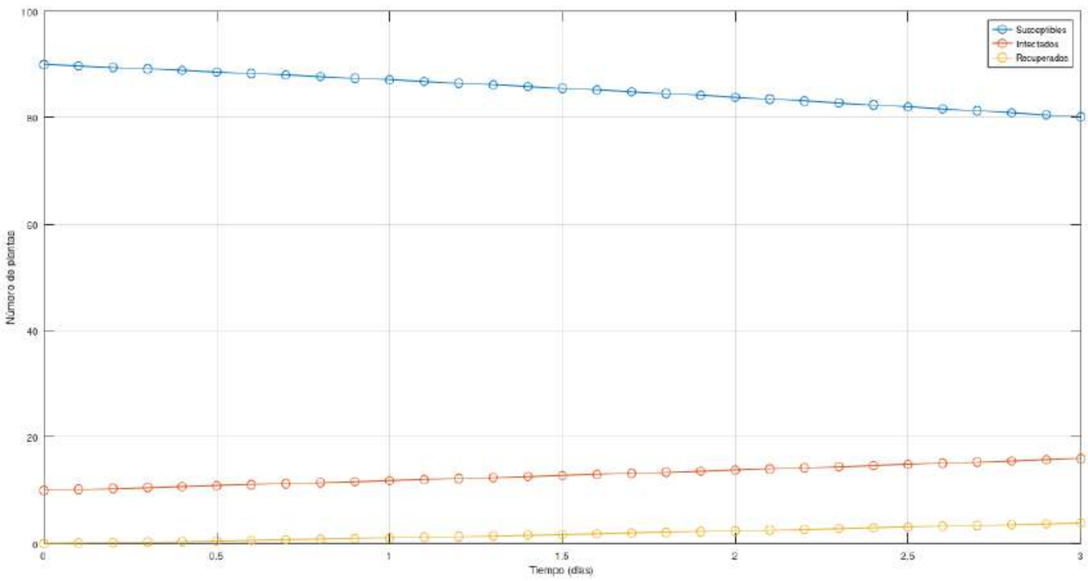
```
% Parámetros
beta = 0.3; % Tasa de infección
alpha = 0.1; % Tasa de recuperación
N = 10; % Número total de plantas (supuesto)
S0 = 90; % Plantas susceptibles iniciales
I0 = 10; % Plantas infectadas iniciales
R0 = 0; % Plantas recuperadas iniciales
t_final = 3; % Tiempo en días
h = 0.1; % Tamaño del paso

% Inicialización de los vectores de solución
t = 0:h:t_final;
S = zeros(1, length(t));
I = zeros(1, length(t));
R = zeros(1, length(t));

% Condiciones iniciales
S(1) = S0;
I(1) = I0;
R(1) = R0;
```

```
% Método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4)
for i = 1:length(t)-1
    k1_S = -beta * S(i) * I(i) / N;
    k1_I = beta * S(i) * I(i) / N - alpha * I(i);
    k1_R = alpha * I(i);

    k2_S = -beta * (S(i) + 0.5 * h * k1_S) * (I(i) + 0.5 * h * k1_I) / N;
    k2_I = beta * (S(i) + 0.5 * h * k1_S) * (I(i) + 0.5 * h * k1_I) / N - alpha * (I(i) + 0.5 * h * k1_I);
    k2_R = alpha * (I(i) + 0.5 * h * k1_I);

    k3_S = -beta * (S(i) + 0.5 * h * k2_S) * (I(i) + 0.5 * h * k2_I) / N;
    k3_I = beta * (S(i) + 0.5 * h * k2_S) * (I(i) + 0.5 * h * k2_I) / N - alpha * (I(i) + 0.5 * h * k2_I);
    k3_R = alpha * (I(i) + 0.5 * h * k2_I);

    k4_S = -beta * (S(i) + h * k3_S) * (I(i) + h * k3_I) / N;
    k4_I = beta * (S(i) + h * k3_S) * (I(i) + h * k3_I) / N - alpha * (I(i) + h * k3_I);
    k4_R = alpha * (I(i) + h * k3_I);

    S(i+1) = S(i) + (h/6) * (k1_S + 2 * k2_S + 2 * k3_S + k4_S);
    I(i+1) = I(i) + (h/6) * (k1_I + 2 * k2_I + 2 * k3_I + k4_I);
    R(i+1) = R(i) + (h/6) * (k1_R + 2 * k2_R + 2 * k3_R + k4_R);
end
```

```
% Mostrar resultados
disp([t' S' I' R'])

% Graficar
figure;
plot(t, S, '-o', t, I, '-o', t, R, '-o');
legend('Susceptibles', 'Infectados', 'Recuperados');
title('Propagación de la enfermedad en plantas de tomate (Modelo SIR)');
xlabel('Tiempo (días)');
ylabel('Número de plantas');
grid on;
```

Resultados:

0	90.0000	10.0000	0
0.1000	89.7281	10.1710	0.1009
0.2000	89.4524	10.3442	0.2034
0.3000	89.1729	10.5193	0.3077
0.4000	88.8896	10.6966	0.4138
0.5000	88.6024	10.8759	0.5217
0.6000	88.3114	11.0572	0.6313
0.7000	88.0165	11.2406	0.7428
0.8000	87.7178	11.4260	0.8562
0.9000	87.4152	11.6135	0.9714
1.0000	87.1087	11.8029	1.0884
1.1000	86.7983	11.9943	1.2074
1.2000	86.4840	12.1876	1.3283
1.3000	86.1659	12.3829	1.4512
1.4000	85.8438	12.5802	1.5760
1.5000	85.5179	12.7793	1.7028
1.6000	85.1881	12.9803	1.8316
1.7000	84.8545	13.1831	1.9624
1.8000	84.5169	13.3878	2.0953
1.9000	84.1756	13.5943	2.2302
2.0000	83.8304	13.8025	2.3672
2.1000	83.4813	14.0125	2.5062
2.2000	83.1285	14.2241	2.6474
2.3000	82.7719	14.4374	2.7907
2.4000	82.4115	14.6523	2.9362
2.5000	82.0474	14.8689	3.0838
2.6000	81.6795	15.0869	3.2335
2.7000	81.3080	15.3065	3.3855
2.8000	80.9328	15.5275	3.5397
2.9000	80.5540	15.7499	3.6961
3.0000	80.1716	15.9737	3.8547



Aplicación del modelo de Gompertz para predecir el crecimiento de planta

El modelo de Gompertz es una función matemática utilizada para describir el crecimiento de organismos o poblaciones bajo ciertas condiciones, así como para modelar procesos biológicos o epidemiológicos. Fue propuesto por Benjamin Gompertz en 1825 y ha sido ampliamente aplicado en diferentes áreas, como la biología, la economía y la agricultura. Se caracteriza por su capacidad de describir un crecimiento sigmoideo, en el que inicialmente el crecimiento es lento, luego se acelera rápidamente hasta un punto máximo y, posteriormente, disminuye hasta estabilizarse en un valor asintótico. Esta forma de curva es particularmente útil para analizar patrones de crecimiento que no se ajustan a modelos lineales o exponenciales.

En fitopatología y agricultura, Gompertz se utiliza para describir la progresión de enfermedades en cultivos, permite ajustar la severidad de la enfermedad a lo largo del tiempo y entender cómo las condiciones ambientales o las prácticas agrícolas afectan su desarrollo. Este enfoque resulta valioso para predecir la incidencia de enfermedades y diseñar estrategias de manejo, se ha empleado para analizar epidemias en cultivos como el trigo y el cacao, proporcionando información clave para minimizar las pérdidas en la producción agrícola.

También el modelo de Gompertz se ha aplicado para describir el crecimiento en longitud de plantas, ajustando los datos de altura a lo largo del tiempo. En estudios forestales, este modelo se utilizó para analizar la relación entre la edad y la altura de árboles (Barrera, 2010).

Matemáticamente, el modelo Gompertz en forma diferencial se expresa como:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(ln(\frac{\alpha}{P})\right)$$

Donde:

P es el tamaño de la cantidad de la variable dependiente (longitud de la planta) en función del tiempo t.

α es el valor asintótico o máximo teórico,

k representa la tasa de crecimiento relativa,

t es el tiempo en el que ocurre el máximo crecimiento

Para obtener la solución analítica a esta ecuación aplicamos un método separación por variables, de la siguiente manera:

$$\int \frac{dP}{P\left(ln(\frac{\alpha}{P})\right)} = \int k\,dt$$

Para simplificar la expresión y aplicar una integral directa, se realiza sustitución de variable

$$u = ln(\frac{\alpha}{P})$$

Al aplicar propiedad de los logaritmos

$$u = ln\,\alpha - ln\,P$$

Se deriva u

$$\frac{du}{\mathrm{d}P} = 0 - \frac{1}{P}$$

Por lo que la derivada de P es:

$$\mathrm{d}P = -Pdu$$

Al realizar la sustitución de la variable queda de la siguiente forma:

$$\int \frac{-Pdu}{Pu} = \int k\,\mathrm{d}t$$

Se simplifica la expresión y se obtiene:

$$-\int \frac{du}{u} = kt + C$$

Al integrar se obtiene:

$$-\,ln\,u = kt + C$$

Se sustituye el valor de u, quedando de la siguiente manera:

$$-\,ln\left(ln(\frac{\alpha}{P})\right) = kt + C$$

Multiplicando por (-1), para aplicar el exponencial a ambos lados de la ecuación.

$$e^{ln\left[ln\left(\frac{\alpha}{P}\right)\right]} = e^{-kt+C}$$

Se obtiene:

$$ln\left(\frac{\alpha}{P}\right) = \mathrm{e}^{-kt+C}$$

$$ln\left(\frac{\alpha}{P}\right) = \mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-kt}$$

$$ln\left(\frac{\alpha}{P}\right) = C\mathrm{e}^{-kt}$$

Al aplicar nuevamente el exponencial se obtiene:

$$\frac{\alpha}{P} = e^{ce^{-kt}}$$

Despejando P, entonces se tiene:

$$P(t) = \alpha e^{-ce^{-kt}}$$

Se consiguió el modelo de Gompertz en la forma exponencial.

Ejercicio de aplicación. Se solicita realizar una predicción mediante el modelo de Gompertz del crecimiento de plantas de brócoli, con las medias experimentales tomados cada 15 días a partir del trasplante indicados en la siguiente tabla de datos.

Tabla 17. *Datos quincenales de altura de la planta de brócoli.*

t (Tiempo - días)	h (Altura de planta - cm)
0	8.0
15	14.0
30	17.0
45	22.0
60	37.5
75	46.2

Los datos medidos corresponden a la temporalidad quincenal de medir la longitud de planta que sobresale de la tierra de la planta de brócoli.

Para realizar la predicción es necesario determinar las contantes α, k y C, paro lo cual partimos de la ecuación:

$$\frac{\alpha}{P} = e^{ce^{-kt}}$$

A esta ecuación se aplica logaritmo natural dos veces con el propósito de obtener una ecuación similar al de una recta. En la primera aplicación queda:

$$ln(\frac{\alpha}{P}) = ln\,(e^{ce^{-kt}})$$

Simplificando la expresión,

$$ln(\frac{\alpha}{P}) = ce^{-kt}$$

Al aplicar logaritmo natural por segunda vez:

$$ln\,[ln\,(\frac{\alpha}{P})] = ln\,(ce^{-kt})$$

Se aplica ley de los logaritmos se presenta:

$$ln\,[ln\,(\frac{\alpha}{P})] = ln\,(c) - kt$$

A esta instancia se puede observar que se asemeja a la ecuación se una recta, para que se visualice de mejor manera tenemos que:

$$ln\,[ln\,(\frac{\alpha}{P})] = y^*$$

Entonces al linealizar la ecuación se tiene:

$$y^* = ln\,(c) - kt$$

Que al comparar con la ecuación de la recta

$$y = b + mt$$

Se tiene que:

$$b = ln\,(c)$$

Por lo que, $e^b = C$ y $k = -m$.

Para el cálculo de m y b, se procede a calcular y^*, considerando el valor de $\alpha = 47$ que es un valor máximo considerado, como se muestra en la figura 34.

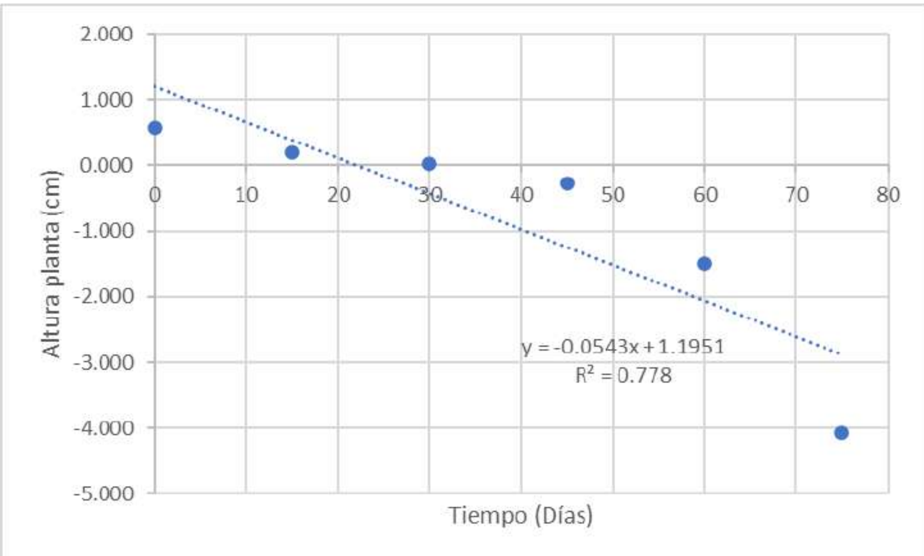
Figura 3434. *Cálculo de* y^*

$$ln\,[ln\,(\frac{\alpha}{P})] = y^*$$

t (días)	h (cm)	y*
0	8.0	0.571
15	14.0	0.192
30	17.0	0.017
45	22.0	-0.276
60	37.5	-1.488
75	46.2	-4.065

Graficando los puntos y^* vs el tiempo y al realizar una regresión lineal (Sí, no recuerdas como realizar regresión lineal en Excel, revisar **Capsula de cocimiento 1**), se obtiene:

Figura 355. *Regresión lineal de* y^*



Como se puede observar el valor de la pendiente $m = -0.0543$ y el valor del intercepto $b = 1.1951$.

Por lo tanto:

$$C = e^{b}$$

$$C = e^{1.1951}$$

$$C = 3.3039$$

Y el coeficiente:

$$k = -m$$

$$k = 0.0543$$

Entonces en base a lo descrito en lo anterior se tiene la ecuación de Gompertz de la siguiente manera:

$$h(t) = \alpha e^{-ce^{-kt}}$$

$$h(t) = 47 * e^{-3.3039 * e^{-0.0543 * t}}$$

Para el análisis se realiza la gráfica con los datos calculados con el modelo de Gompertz como se muestra en la Figura 35.

Figura 36. *Cálculo de datos con el modelo de Gompertz*

$$h(t) = 47 * e^{-3.3039 * e^{-0.0543 * t}}$$

t (días)	hGompertz
0	1.73
15	10.88
30	24.59
45	35.28
60	41.39
75	44.43

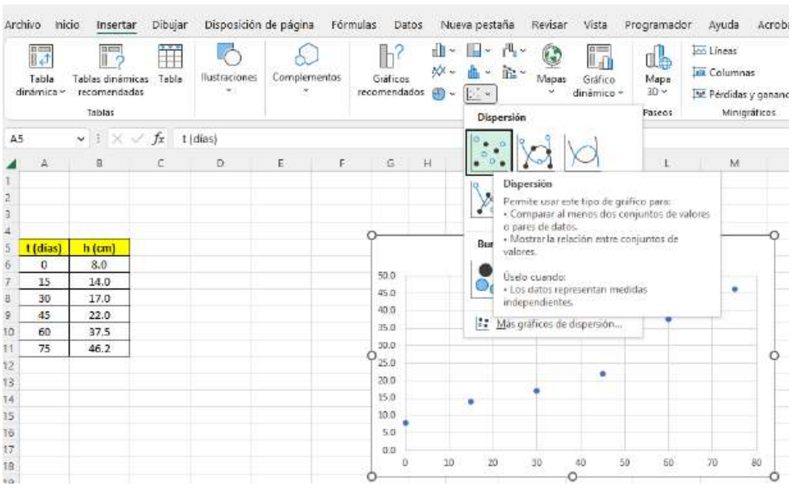
Estos datos se graficaron junto a los datos reales para realizar un contraste de los resultados obtenidos en el modelado, como se observa en el Figura 36.

Figura 37. *Datos reales vs Modelo de Gompertz*

Capsula de conocimiento 1. Regresión lineal en Excel

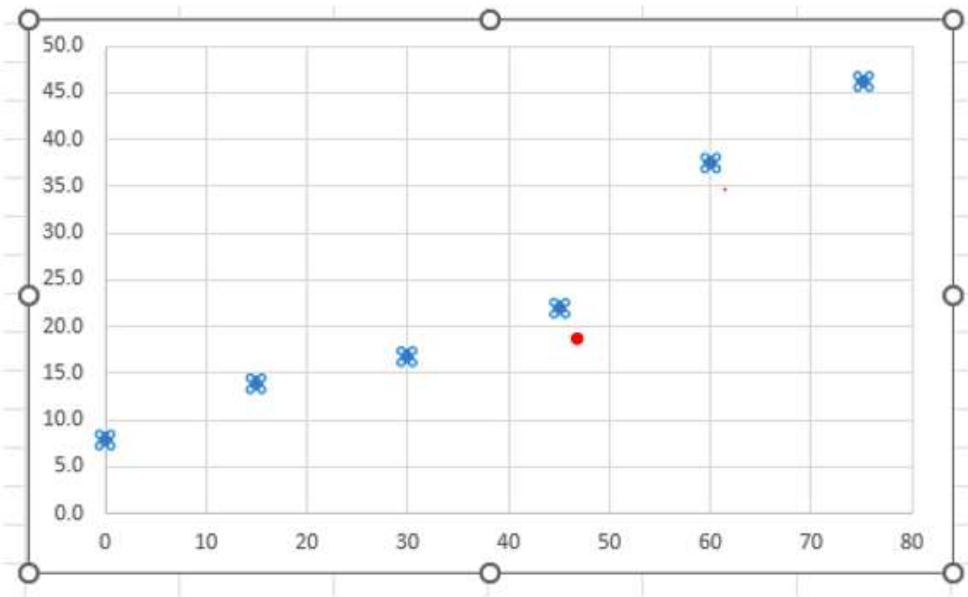
Marcar los datos de regresión y gráficos solo puntos en el menú Insertar – Grafico de dispersión, como se muestra la Figura 38.

Figura 38. *Menú Insertar – Grafica de dispersión de Excel*



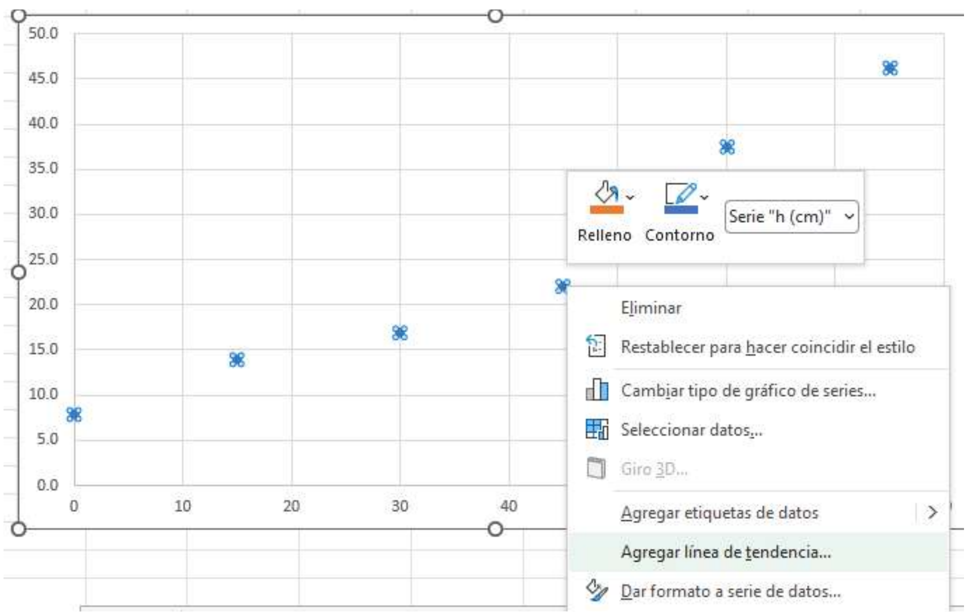
El resultado es la gráfica de puntos que se muestra en la Figura 39.

Figura 39. *Grafica de Dispersión*



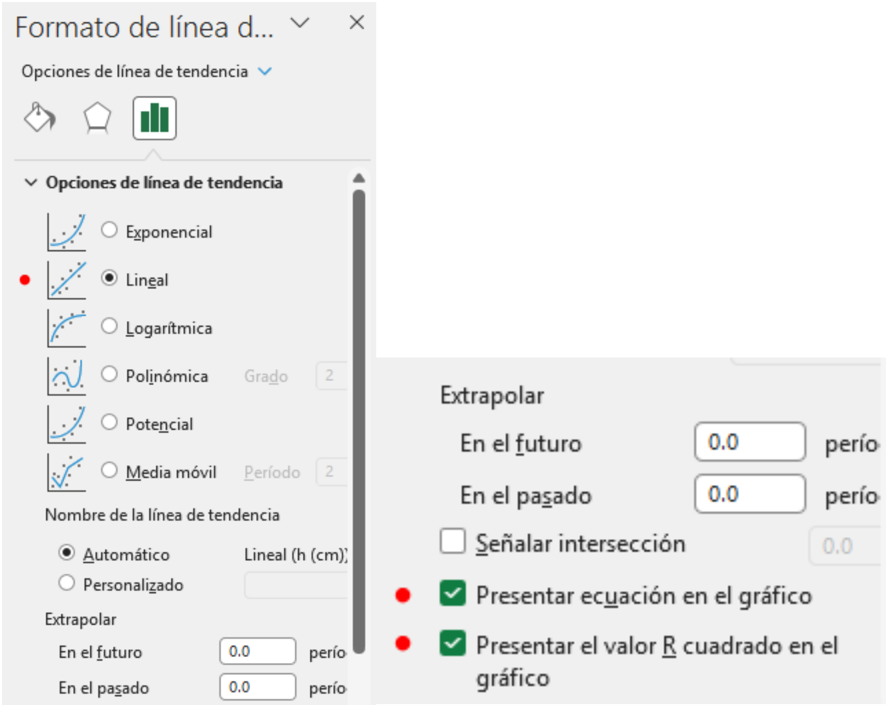
Sobre cualquier punto (este caso el que se indica con rojo), dar clic derecho y el menú selecciona Agregar línea de tendencia ver Figura 40.

Figura 40. *Menú Agregar línea de tendencia*



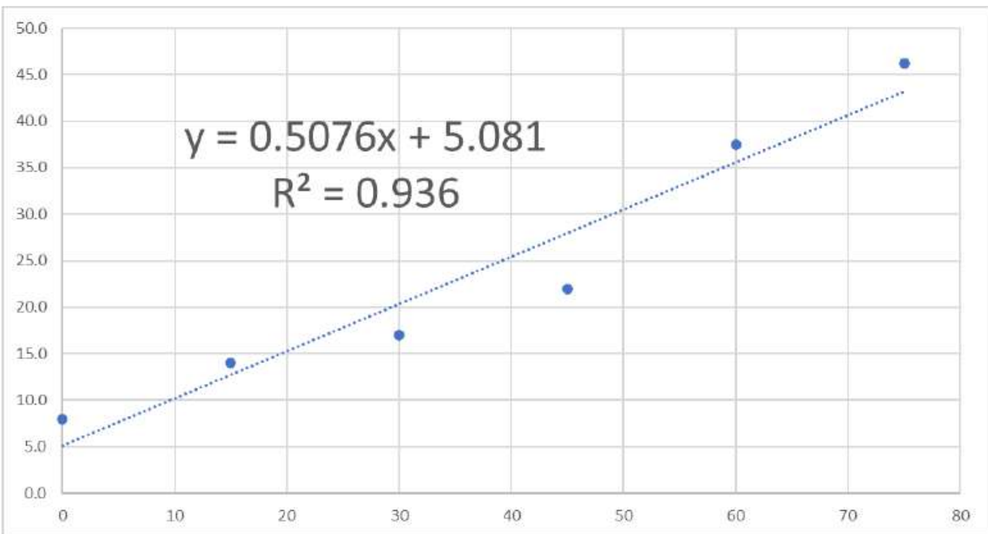
Del cual se despliega el subiente menú, seleccione la tendencia lineal y active visualizar ecuación y R^2 como se observa en la Figura 41.

Figura 41. *Tendencia lineal*



El resultado de esta operación es la Figura 42, con la visualización de la ecuación y el coeficiente de determinación R^2.

Figura 41. *Regresión lineal*



Por lo tanto, la ecuación obtenida de la recta es:

$$y = mx + b$$

$$y = 0.5076x + 5.081$$

Interés compuesto

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) también tienen amplias aplicaciones en el modelado de fenómenos financieros, como el cálculo del interés compuesto que se refiere al crecimiento de un capital inicial al reinvertirse los intereses generados en cada período, creando un efecto acumulativo. Este fenómeno puede modelarse con la forma:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = rS$$

Donde:

$S(t)$ es la cantidad de dinero acumulada en el tiempo t

r es la tasa de interés anual.

La solución a esta ecuación diferencial proporciona una fórmula explícita para calcular el interés compuesto de forma continua.

La solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = rS$$

Se obtiene separando variables e integrando:

$$S(t) = \mathrm{S}_0 e^{\mathrm{r}t}$$

Donde S_0 es el capital inicial. Este modelo asume que el crecimiento del capital es continuo y no discreto, lo cual se acerca más a ciertos contextos financieros avanzados como en los bancos y las inversiones de alto rendimiento pueden usar este tipo de cálculo para estimar ganancias a largo plazo, considerando reinversiones frecuentes de intereses.

Ejercicio de aplicación. Se pide determinar la cantidad de dinero se agota, si se deposita 15000 dólares en una cuenta de ahorros, y el banco ofrece una tasa de interés anual del 5% capitalizado continuamente, también se planea efectuar retiros anuales fijos de 3000 dólares (Teppas, 2020).

El planteamiento de la ecuación diferencial según los datos del problema es la siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0.05S - 3000$$

Se puede observar que es una ecuación diferencial de primer orden lineal de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} - 0.05S = -3000$$

Se calcula el factor integrante de la siguiente forma:

$$u(t) = e^{\int p(t)\,dt}$$

$$u(t) = e^{\int -0.05\,dt}$$

$$u(t) = e^{-0.05t}$$

Luego, el factor integrante se multiplica cada término de la EDO lineal de la forma:

$$u(t)[S' + p(t)S] = u(t)q(t)$$

Resolviendo las operaciones matemáticas correspondientes, la nueva expresión quedaría:

$$\frac{d}{dt}[e^{-0.05t}S] = -3000 * e^{-0.05t}$$

$$\int d[e^{-0.05t}S] = -3000 \int e^{-0.05t} dt$$

$$e^{-0.05t}S = -3000 \int e^{-0.05t} dt + C$$

Estableciendo de esta manera la resolución de la EDO lineal de la forma:

$$S(t) = \frac{3000}{e^{-0.05t}} \int e^{-0.05t} dt + C$$

$$S(t) = \frac{3000}{e^{-0.05t}} \int e^{-0.05t} dt + C$$

Entonces la solución particular es.

$$S(t) = 60000 + Ce^{-0.05t}$$

Aplicando las condiciones iniciales $S(0) = 15000$, entonces

$$C = -45000$$

Por lo tanto, la solución particular:

$$S(t) = 60000 + -45000e^{-0.05t}$$

Para determinar tiempo en el que se agota el dinero se procede de la siguiente manera:

$$S(t) = 0$$

Por lo tanto:

$$0 = 60000 + -45000e^{-0.05t}$$

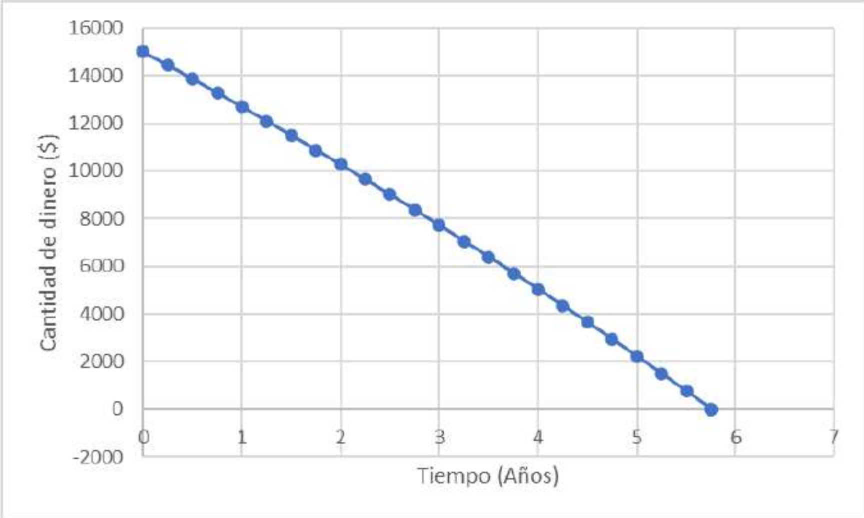
Despejando t

$$t = \frac{\ln\left(\frac{60}{45}\right)}{0.05}$$

$$t = 5.75$$

Entonces el dinero se agota en 5.75365 años, como se puede observar la Figura 43.

Figura 442. *Cantidad de dinero*



Ahora vamos a modificar un poco el enunciado con el fin de aplicar el método de Euler para encontrar una solución aproximada.

Ejercicio de aplicación. Se pide determinar la cantidad de dinero a los 6 años, si se deposita 15000 dólares en una cuenta de ahorros, y el banco ofrece una tasa de interés anual del 5% capitalizado continuamente, también se planea efectuar retiros anuales fijos de 3000 dólares.

El planteamiento de la ecuación diferencial según los datos del problema es la siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 0.05S - 3000$$

Como se puede observar se trata de una EDO de primer orden, se propone resolver por el método numérico de Euler. Entonces

$$f(t, S) = \frac{dS}{dt} = 0.05S - 3000$$

Para resolver por el método de Euler se realiza mediante la figura 43, el valor que se debe cambiar se representa a $f(t,S) = \frac{dS}{dt} = 0.05S - 3000$ es la ecuación diferencial planteada y se encuentra en la celda marcado con gris como se muestra en la figura 44.

Figura 44. *Soluciones aproximadas por el método de Euler en Excel*

x0	0
y0	15000
Xf	5.75
h	0.25

=E9+$D$5*F9

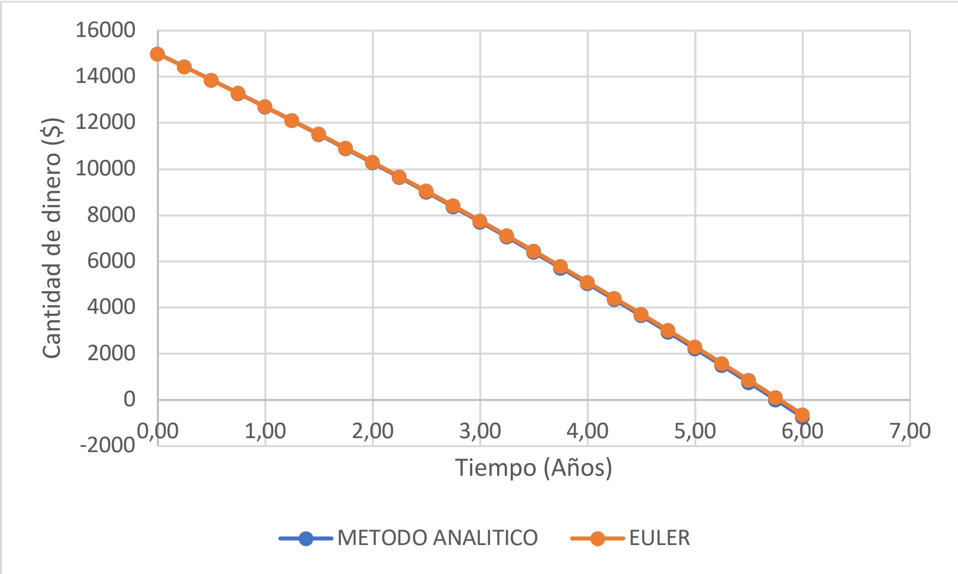
=(0.05*E9)-3000

ITERACION	t	S	f(t,S)
0	0.00	15000.00	-2250
1	0.25	14437.50	-2278.125
2	0.50	13867.97	-2306.6016
3	0.75	13291.32	-2335.4341
4	1.00	12707.46	-2364.627
5	1.25	12116.30	-2394.1848
6	1.50	11517.76	-2424.1122
7	1.75	10911.73	-2454.4136
8	2.00	10298.13	-2485.0937
9	2.25	9676.85	-2516.1574
10	2.50	9047.81	-2547.6094
11	2.75	8410.91	-2579.4545
12	3.00	7766.05	-2611.6977
13	3.25	7113.12	-2644.3439
14	3.50	6452.04	-2677.3982
15	3.75	5782.69	-2710.8657
16	4.00	5104.97	-2744.7515
17	4.25	4418.78	-2779.0609
18	4.50	3724.02	-2813.7991
19	4.75	3020.57	-2848.9716
20	5.00	2308.32	-2884.5838
21	5.25	1587.18	-2920.6411
22	5.50	857.02	-2957.1491
23	5.75	117.73	-2994.1134
24	6.00	-630.80	-3031.5399

En la figura 44 se puede observar el desarrollo completo, donde el valor aproximado en después de 6 años es: -630.80 que se considera como un valor de cero, lo cual quiere decir que no existiría dinero en la cuenta.

Además, en la figura 45 se representa tanto la solución analítica como la aproximada del problema como se puede observar son muy similares por lo tanto el error es mínimo.

Figura 43. *Solución gráfica comparativa entre resolución numérica (Euler) y analítica de la cantidad de dinero en la cuenta*



Ingeniería Ambiental

Las ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizan en el tratamiento de aguas residuales para modelar la descomposición o eliminación de contaminantes en el tiempo. Matemáticamente:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

Donde C representa la concentración de un contaminante en el agua, t es el tiempo, y k es una constante que depende de las condiciones del proceso, como la tasa de degradación del contaminante o la eficiencia de los métodos de tratamiento (como la filtración, la oxidación, o la biorremediación). Esta ecuación describe cómo la concentración del contaminante disminuye con el tiempo, y su solución proporciona un modelo que ayuda a predecir la cantidad de contaminante que queda en el agua a lo largo del proceso de tratamiento. Este tipo de modelo es fundamental para diseñar sistemas de tratamiento eficientes y para asegurar que los niveles de contaminantes sean reducidos a valores seguros y aceptables antes de liberar el agua tratada al medio ambiente.

Ejercicio de aplicación. En una planta de tratamiento de aguas residuales, se monitorea la degradación de materia orgánica. Este proceso sigue una ley exponencial de decaimiento, modelada con una ecuación diferencial. Este modelo es clave para determinar la eficiencia de los sistemas de tratamiento.

Modelo Matemático:

La ecuación es:

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

donde:

$C(t)$ es la concentración de materia orgánica en el tiempo (mg/L),

$k = 0.1\ d^{-1}$ es la constante de descomposición

$$C(t) = 50\ mg/L$$

Resolución Analítica:

La solución es:

$$C(t) = \ C_0 e^{-kt}$$

Para $k = 0.1\ d^{-1}$ y $C(t) = 50\ mg/L$, evaluamos:

$$C(10) = \ 50e^{-0.1(10)} = 50e$$

$$C(10) = 18.40\ mg/L$$

Esto significa que, después de 10 días, la concentración de materia orgánica se ha reducido a aproximadamente 18.40 mg/L.

Método Numérico: Runge-Kutta (Orden 4):

Calculamos C(t) paso a paso, estimando el valor en el siguiente punto a partir de combinaciones ponderadas de la derivada en diferentes puntos intermedios dentro del intervalo.

$$C_{n+1} = C_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, C_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, C_n + h.k_3),$$

Con h= 0.1 días en el intervalo de $t \epsilon$ [0, 10],

En cada paso, calculamos estas 4 pendientes intermedias.

Usamos una combinación ponderada de las pendientes para avanzar al siguiente valor.

Desarrollo (primer paso): Para $\boldsymbol{C(0)}$=50 y h=1

Calculamos las pendientes:

$$k_1 = -0.1(50) = -5,$$

$$k_2 = -0.1(50 + 0.05(-5)) = -4.975,$$

$$k_3 = -0.1(50 + 0.05(-4.975)) = -4.975125,$$

$$k_4 = -0.1(50 + 0.1(-4.975125)) = -4.950248,$$

Combinamos

$$C_1 = 50 + \frac{0.1}{6}(-5 + 2(-4.975) + 2(-4.975125) + (-4.95024875)) = 49.502 \text{ mg/L}$$

Luego de varias interacciones, obtenemos una aproximación de 18.2 mg/L, muy cercana a la solución analítica.

Método Numérico: Euler

El método de Euler aproxima la solución iterativamente con:

$$C_{n+1} = C_n + h\,.\,f(t_n, C_n)$$

donde:

Cn: temperatura en el paso n,

h: tamaño del paso (en días),

t_n: tiempo correspondiente al paso n,

$f(t, C) == -kC$ pendiente e la ecuación en el punto (t, C)

1. Comenzamos con Para C(0)=50 y h=1

2. Iteramos

$$C_1 = C_0 + h\,.\,(-kC_0)$$

sustituimos

$$C_1 = 50 + 0.1\,.\,(\,-0.1(50)) = 49.5\,mg/L$$

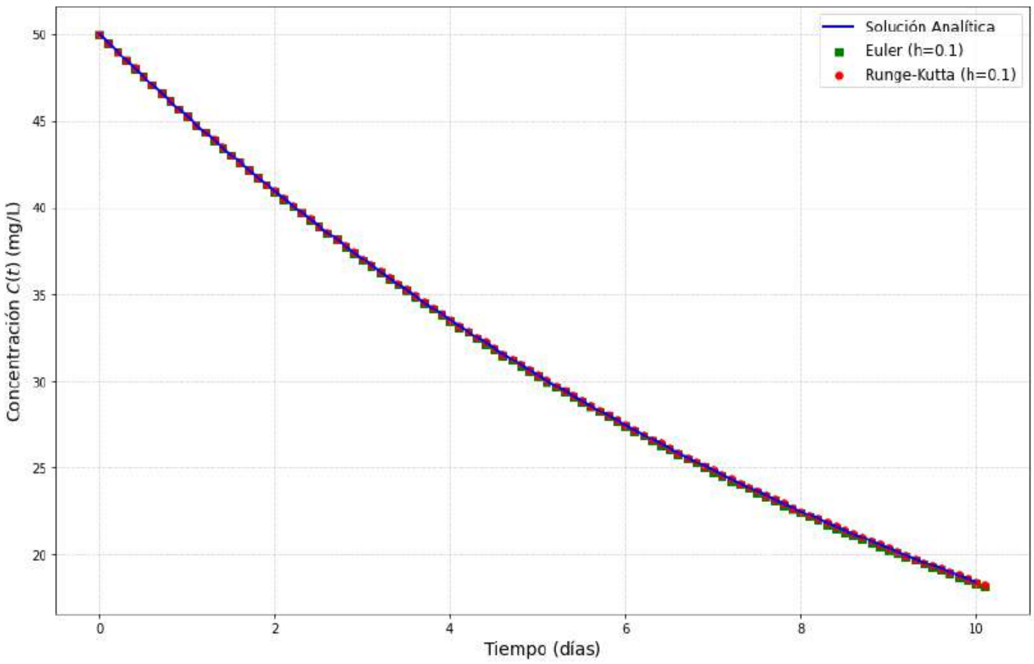
Cada paso sigue el mismo procedimiento, calculando C_{n+1} con la pendiente local $f(t_n, C_n)$.

Luego de varias interacciones, obtenemos una aproximación de 18.1 mg/L, muy cercana a la solución analíticas.

Gráfico

La gráfica de C_t muestra una curva decreciente exponencialmente con el tiempo, acercándose a cero, ver figura 46, además se puede visualizar la comparación entre los tres métodos aplicados luego de varias iteraciones realizadas.

Figura 44. *Comparación Analítica, Runge-Kutta y Euler – Aguas residuales*



a) *Solución Analítica (línea azul):*

Representa la solución exacta de la ecuación diferencial.

Es una curva suave y continua que decrece exponencialmente, mostrando cómo la concentración disminuye con el tiempo.

b) *Método de Euler (cuadrados verdes):*

Sigue de cerca la solución analítica, pero muestra ligeras desviaciones en los puntos más alejados del inicio (t>5días).

Esto es característico del método de Euler, que acumula errores a medida que avanza en los pasos, especialmente para tamaños de paso moderados (h=0.1).

c) *Método de Runge-Kutta (círculos rojos):*

Coincide casi perfectamente con la solución analítica en todos los puntos.

Esto valida la precisión del método RK4, que tiene un error mucho menor comparado con Euler debido a su integración más sofisticada utilizando pendientes intermedias.

Ingeniería Química

Ejercicio de aplicación: Un reactor químico necesita enfriarse para evitar riesgos y garantizar la seguridad del proceso. Este sistema sigue una ley de enfriamiento que depende de la diferencia entre la temperatura del reactor y la del ambiente.

Modelo Matemático:

La ecuación es:

$$\frac{dT}{dt} = -a(T - T_{\infty})$$

donde:

$T(t)$ es la temperatura del reactor (∘C),

$T_{\infty} = 25 \circ \mathrm{C}$ es la temperatura ambiente,

$a = 0.05\ min^{-1}$ es la constante de enfriamiento,

$T(0) = 100 \circ \mathrm{C}$ es la temperatura inicial

Resolución Analítica:

La solución es:

$$T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{-at}$$

Para t=30:

$$T(30) = 25 + (100 - 25)e^{-0.05(30)} = 25 + 75e^{-1.5}$$

Evaluando

$$T(30) = 25 + \ 75.0.22313 = 41.73\ \circ\mathrm{C}$$

Método Numérico: Runge-Kutta

Usamos el método de Runge-Kutta (Orden 4) para calcular T(t) en intervalos de 1 minuto hasta t=50 minutos.

$$T_{n+1} = T_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, T_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, T_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + T + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, T_n + h.k_3),$$

Desarrollo (primer paso): Para $T(0)$=100, T∞=25, a=0.05 y h=1

Calculamos las pendientes:

$$k_1 = -0.05(100 - 25) = -3.75,$$

$$k_2 = -0.05(96.25 - 25) = -3.5625,$$

$$k_3 = -0.05(96.4375 - 25) = -3.571875,$$

$$k_4 = -0.05(96.428125 - 25) = -3.57140625,$$

Combinamos

$$T_1 = 100 + \frac{1}{6}(-3.75 + 2(-3.5625) + 2(-3.571875) + (-3.57140625)) = 96.43 \ \circ \mathrm{C}$$

Método Numérico: Euler

El método de Euler aproxima la solución iterativamente con:

$$T_{n+1} = T_n + h \,.\, f(t_n, T_n)$$

donde:

Tn: temperatura en el paso n,

h: tamaño del paso (en minutos),

$f(t_n, T_n) = = -a(T_n - \ T_\infty)$ pendiente de la ecuación en el punto (t_n, T_n)

3. Comenzamos con Para $T(0)$=100 y h=1

4. Iteramos

sustituimos T∞=25, a=0.05

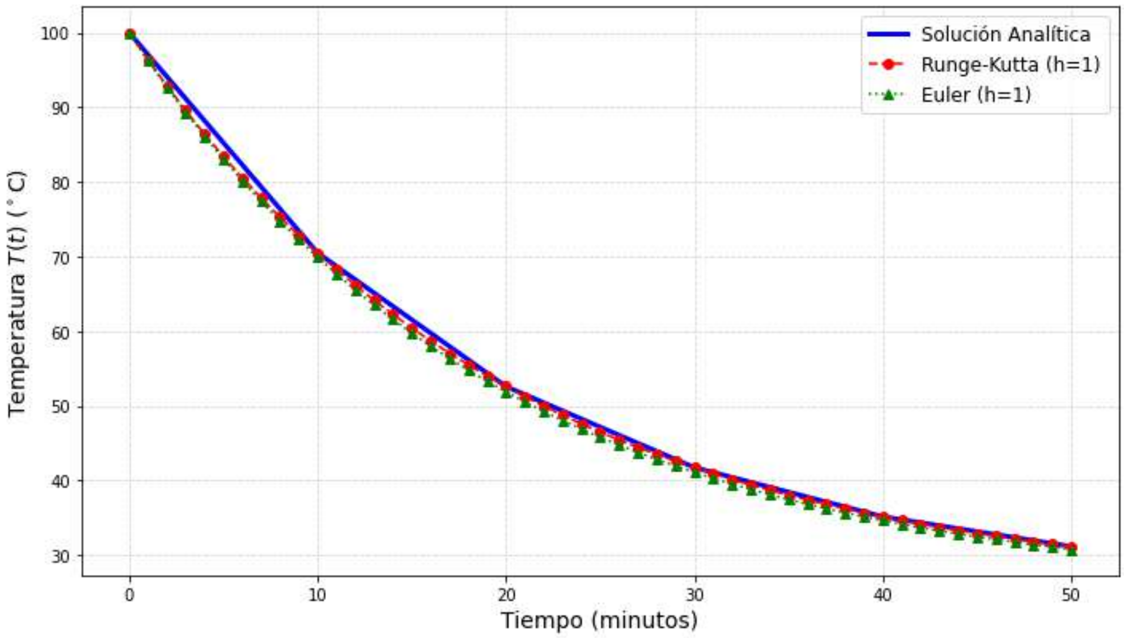
Para T0=100

$$T_1 = 100 + 1\,.\,(\,-0.05(100 - 25)) = \ 100 - 3.75 = \ 96.25 \circ \mathrm{C}$$

Gráfico

La figura 47, T(t) es decreciente, mostrando cómo el reactor se enfría y se estabiliza cerca de T_∞, además se puede visualizar la comparación entre los tres métodos aplicados luego de varias iteraciones realizadas.

***Figura 45**. Comparación Analítica, Runge-Kutta y Euler – Enfriamiento del reactor*



a) Solución Analítica (línea azul): Representa la solución exacta obtenida al resolver la ecuación diferencial de forma analítica.

Como es una solución exacta, esta curva actúa como la referencia contra la cual se comparan las aproximaciones numéricas.

b) Método de Runge-Kutta (puntos rojos con línea discontinua): La solución numérica usando el método de Runge-Kutta coincide prácticamente con la solución analítica en todos los puntos.

Esto demuestra la alta precisión de Runge-Kutta incluso con un tamaño de paso moderado (h=1).

c) Método de Euler (triángulos verdes con línea discontinua): La aproximación de Euler también sigue de cerca la solución analítica, pero con un error ligeramente mayor que el de Runge-Kutta.

La precisión de Euler depende más del tamaño de paso; h=1 es suficientemente pequeño para obtener una solución razonable, pero para pasos más grandes se podrían notar desviaciones significativas.

Ingeniería Estadística

Ejercicio de aplicación: En un laboratorio, se estudia el crecimiento de una población bacteriana en un medio controlado. Este tipo de análisis es fundamental para prever el comportamiento de microorganismos en aplicaciones biotecnológicas.

Modelo Matemático:

La ecuación es:

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

donde:

$N(t)$: población bacteriana en función del tiempo t (en horas),

$r = 0.3\ h^{-1}$ es la tasa de crecimiento,

$N(0) = 100$ población inicial en t=0

Resolución Analítica:

La solución es:

$$N(t) = e^{C_1}e^{rt}$$

Se define $e^{C_1} = N(0)$, la población inicial:

$$N(t) = N(0)e^{rt}$$

Sustituimos valores: N(0)=100 y r=0.3

$$N(t) = 100e^{0.3t}$$

Para t=5 horas, por ejemplo:

$$N(5) = 100e^{0.3(5)}$$

$$N(5) = 448.17\ aproximadamente$$

Método Numérico: Runge-Kutta

Usamos el método de Runge-Kutta (Orden 4) para calcular N(n+1) para mejorar la precisión:

$$N_{n+1} = N_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, N_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, N_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + N_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, N_n + h.k_3),$$

Desarrollo (primer paso): Para $N(0)$=100, r=0.3 y h=0.1

Calculamos las pendientes:

$$k_1 = 0.3(100) = 30,$$

$$k_2 = 0.3(100 + 0.05(30)) = 30.45,$$

$$k_3 = 0.3(100 + 0.05(30.45)) = 30.45675,$$

$$k_4 = 0.3(100 + 0.1(30.45675)) = 30.9137025,$$

Combinamos

$$N_1 = N_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$N_1 = 100 + \frac{0.1}{6}(30 + 2(30.45) + 2(30.45675) + (30.913)) = 103.045$$

Se repite el proceso para calcular N_1en cada paso.

Método Numérico: Euler

El método de Euler es una aproximación numérica basada en el valor de la derivada en un punto para avanzar al siguiente.

El método de Euler aproxima la solución iterativamente con:

$$N_{n+1} = N_n + h\,.\,f(t_n, N_n)$$

donde:

$N(n)$: población bacteriana en función del tiempo t (en horas),

h: tamaño del paso,

$f(t, N) = \ r\ N$ pendiente de la ecuación

1. Comenzamos con para $N(0)$=100, r = 0.3 y h=0.1
2. Iteramos

Para t=0

$$N_1 = N_0 + h\,.\,r\ N_0 = 100 + 0.1(0.3 * 100) = 103$$

Para t=1

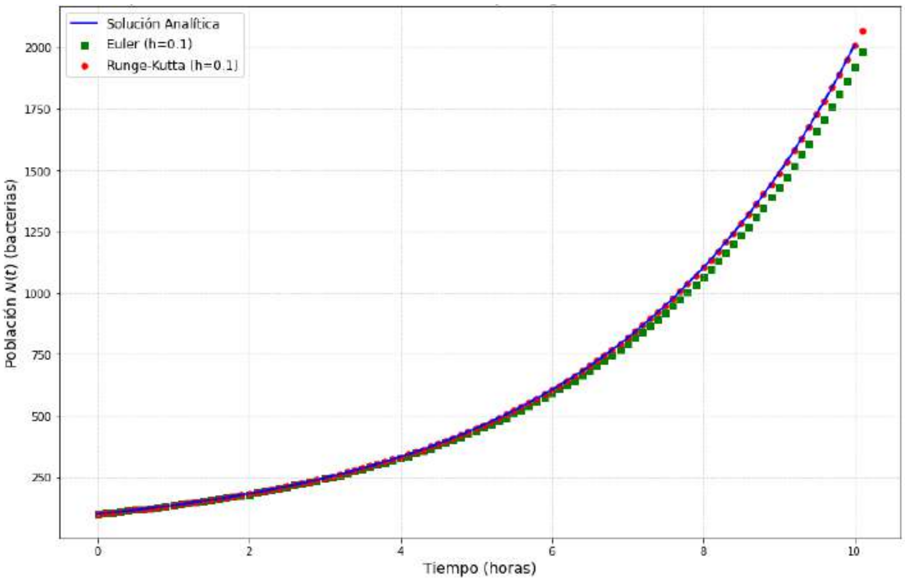
$$N_2 = N_1 + h\,.\,r\ N_1 = 103 + 0.1(0.3 * 103) = 106.09$$

Se repite el proceso iterativamente para calcular los valores de $N_n$en cada paso.

Gráfico

La figura 48 muestra como la población bacteriana comienza a crecer lentamente, pero a medida que el tiempo avanza, el crecimiento se acelera debido a la naturaleza exponencial del modelo. Para t=10 horas, la población supera las 2,000 bacterias, lo que ilustra cómo el modelo puede prever con precisión el comportamiento del sistema. Además, se puede visualizar la comparación entre los tres métodos aplicados luego de varias iteraciones realizadas.

Figura 46. *Comparación Analítica, Runge-Kutta y Euler – Crecimiento Bacteriano*



a) Solución Analítica (Línea Azul):

Representa el crecimiento exacto de la población bacteriana, la curva muestra un crecimiento exponencial típico, aumentando de forma más acelerada a medida que el tiempo avanza.

b) Método de Euler (Cuadrados Verdes):

Sigue de cerca la solución analítica, especialmente en los primeros tiempos ($t<5$), sin embargo, se observa una desviación leve a medida que t se acerca a $t=10$. Esto es esperado debido al error acumulativo que caracteriza el método de Euler, especialmente para tamaños de paso moderados ($h=0.1$).

c) Método de Runge-Kutta (Círculos Rojos):

Coincide casi perfectamente con la solución analítica en todo el rango de tiempo, esto se debe a la alta precisión del método RK4, que integra con mayor exactitud al utilizar varias pendientes intermedias para cada paso.

Ingeniería Agronómica

Ejercicio de aplicación: En el manejo de suelos agrícolas, es importante monitorear la cantidad de nutrientes disponibles para las plantas. La disminución de nutrientes con el tiempo puede modelarse mediante una ecuación diferencial.

El ejercicio estudia la absorción de nutrientes por las raíces de las plantas en un suelo controlado. Este tipo de análisis es crucial en la agricultura para prever la cantidad de fertilizante necesaria y su velocidad de absorción.

Modelo Matemático:

La velocidad de absorción se modela mediante la ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -kC$$

donde:

$C(t)$ concentración de nutrientes en el suelo (mg/L) en función del tiempo t (en horas),

$k = 0.05\ h^{-1}$ es la constante de absorción,

$C(0) = 100\ mg/L$ es la concentración inicial de nutrientes en el suelo

Resolución Analítica:

La solución es:

$$C(t) = e^{C_1}e^{-kt}$$

Se define $e^{C_1} = C(0)$, la concentración inicial:

$$C(t) = C(0)e^{-kt}$$

Sustituimos valores: C(0)=100 y k=0.05

$$C(t) = 100e^{-0.05t}$$

Para t=5 horas, por ejemplo:

$$C(5) = 100e^{-0.05(5)}$$

$$C(5) = 77.88\, mg/L\ aproximadamente$$

Método Numérico: Runge-Kutta

Usamos el método de Runge-Kutta (Orden 4) para calcular C(t) :

$$C_{n+1} = C_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, C_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, C_n + h.k_3),$$

Desarrollo (primer paso): Para $C(0)$=100, k=0.05 y h=1 hora.

Calculamos las pendientes (t=0):

$$k_1 = -0.05(100) = -5,$$

$$k_2 = -0.05(100 - 0.5(5) = -4.875,$$

$$k_3 = -0.05(100 - 0.5(4.875)) = -4.878125,$$

$$k_4 = -0.05(100 - 4.878125) = -4.75609375,$$

Combinamos

$$C_1 = C_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$C_1 = 100 + \frac{1}{6}(-5 + 2(-4.875) + 2(-4.578125) + (-4.7)) = 95.12\, mg/L$$

Se repite el proceso para calcular Cn en cada paso.

Método Numérico: Euler

El método de Euler aproxima la solución iterativamente con:

$$C_{n+1} = C_n + h\,.\,f(t_n, C_n)$$

donde:

Cn: concentración aproximada en el paso nnn,

h: tamaño del paso,

$f(t, C) = = -kC)$ pendiente de la función

1. Comenzamos con Para $C(0)$=100, k=0.05 y h=1
2. Iteramos

Para t=0

$$C_1 = C_0 + h\,.\,(-k\; C_0) = 100 + 1(-0.05 * 100) = 95$$

Para t=1

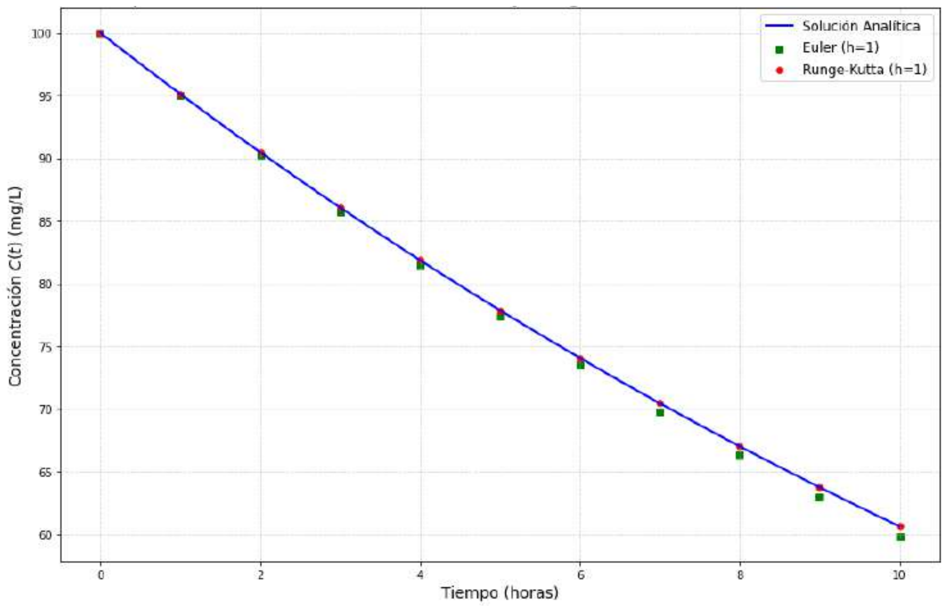
$$C_2 = C_1 + h\,.\,(-k\; C_1) = 95 + 1(-0.05 * 95) = 90.25$$

Se repite el proceso iterativamente para calcular los valores de $C_n$en cada paso.

Gráfico

La figura 49, muestra como la concentración de nutrientes disminuye de forma exponencial, lo que indica una tasa de absorción constante por parte de las raíces, después de 10 horas, la concentración en el suelo ha disminuido considerablemente, lo que refleja la efectividad del proceso de absorción. Además, se puede visualizar la comparación entre los tres métodos aplicados luego de varias iteraciones realizadas.

Figura 47. *Comparación Analítica, Runge-Kutta y Euler – Absorción Nutrientes*



a) Solución Analítica (Línea Azul):

Representa la disminución exacta de la concentración de nutrientes en función del tiempo.

La curva decrece exponencialmente, como era de esperarse del modelo, mostrando una absorción constante de nutrientes por parte de las raíces.

b) Método de Euler (Cuadrados Verdes):

Sigue razonablemente de cerca la solución analítica.

Aunque hay pequeñas desviaciones visibles, estas son más notorias hacia los valores finales del tiempo (t=10).

Esto refleja la acumulación de errores típica del método de Euler, especialmente cuando se utilizan pasos grandes (h=1).

c) Método de Runge-Kutta (Círculos Rojos):

Coincide casi perfectamente con la solución analítica en todo el rango de tiempo.

Este comportamiento destaca la precisión superior del método RK4, incluso con un tamaño de paso grande (h=1).

GLOSARIO

Absorción de Nutrientes

Fenómeno modelado matemáticamente como un proceso de decaimiento exponencial en el cual la concentración de nutrientes disminuye debido a su absorción constante por parte de un sistema, como raíces de plantas.

Crecimiento Exponencial

Proceso en el que una cantidad aumenta a una tasa proporcional a su valor actual, descrito por la ecuación diferencial, $\frac{dN}{dt} = rN$, donde r es la constante de crecimiento.

Condición Inicial

Valor específico de la variable dependiente en un tiempo inicial (t=0) que permite determinar una solución única para una ecuación diferencial.

Constante de Absorción (k)

Parámetro que caracteriza la velocidad con la que disminuye una cantidad, como la concentración de nutrientes en un modelo de decaimiento exponencial. Tiene unidades inversas al tiempo.

Constante de Crecimiento (r)

Parámetro que describe la rapidez con la que una población o cantidad crece exponencialmente en función del tiempo.

Derivada

Medida del cambio instantáneo de una variable dependiente con respecto a una independiente. Matemáticamente, $\frac{dy}{dx}$ representa la derivada de *y* respecto a *x*.

Derivada Parcial

Derivada de una función de varias variables con respecto a una de ellas, manteniendo las otras constantes.

Derivada de Primer Orden

La primera derivada de una función, que describe la tasa de cambio más básica de la variable dependiente.

Discretización

Proceso de convertir una ecuación diferencial continua en un sistema discreto para resolverlo numéricamente.

Ecuación de Bernoulli

Una EDO de la forma. Puede transformarse en una ecuación lineal aplicando un cambio de variable

Ecuación Diferencial

Relación matemática entre una función y sus derivadas. Representa fenómenos físicos, biológicos o químicos, como el crecimiento exponencial o el decaimiento de sustancias.

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Una ecuación que relaciona una o más derivadas de una función desconocida respecto a una sola variable independiente.

Ecuación Homogénea

Una EDO es homogénea si puede escribirse en la forma o si sus términos dependen solo de proporciones.

Ecuación Reducible

Una ecuación que no es directamente resoluble pero que puede transformarse en otra forma más manejable. Ejemplo: ecuación de Bernoulli.

Error Acumulativo

Errores que se suman iterativamente en métodos numéricos, especialmente en aproximaciones como el método de Euler.

Error de Truncamiento

Diferencia entre el valor exacto de una solución y su aproximación numérica debido a la simplificación de las fórmulas matemáticas.

Exactitud

Capacidad de un método numérico de aproximar la solución real de una ecuación diferencial con un error mínimo.

Grado de una EDO

El exponente máximo al que está elevada la derivada de mayor orden de la ecuación.

Integración Numérica

Proceso de resolver ecuaciones diferenciales mediante métodos numéricos que aproximan el área bajo una curva, como Euler y Runge-Kutta.

Isóclina

Curvas en el campo de direcciones donde la pendiente es constante.

Iteración

Proceso repetitivo en el cual un método numérico calcula un nuevo valor utilizando el valor anterior y una fórmula predefinida.

Método Numérico

Técnica matemática para aproximar soluciones de ecuaciones que no pueden resolverse analíticamente, como el método de Euler o Runge-Kutta.

Método de Euler

Método numérico iterativo de primer orden para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales, $y_{n+1} = y_n + h \, . f(x_n, y_n)$

Método de Runge-Kutta

Método numérico de cuarto orden para resolver ecuaciones diferenciales. Su fórmula general es:

$$C_{n+1} = C_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = f(t_n, C_n),$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, C_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f(t_n + h, C_n + h.k_3),$$

Modelo Matemático

Representación de un fenómeno real mediante ecuaciones matemáticas. En este caso, describe procesos como el crecimiento bacteriano o la absorción de nutrientes.

Orden de Convergencia

Medida de la rapidez con la que el error de un método numérico disminuye al reducir el tamaño del paso (h). El método de Euler es de orden 1, mientras que RK4 es de orden 4.

Orden de una EDO

El mayor orden de las derivadas presentes en la ecuación.

Pendiente Local

Derivada evaluada en un punto específico, utilizada en métodos numéricos para estimar la pendiente de la curva de la solución.

Primer Orden

Se refiere a ecuaciones diferenciales en las que la derivada de mayor orden es de primer grado, es decir, contiene términos como pero no derivadas de orden superior.

Razón de Cambio

Describe cómo cambia una variable respecto a otra.

Solución Analítica

Solución exacta de una ecuación diferencial, obtenida mediante técnicas algebraicas o de cálculo. Proporciona un marco de referencia para evaluar métodos numéricos.

Solución Aproximada

Resultado numérico que se obtiene aplicando métodos computacionales o iterativos, como los métodos de Euler o Runge-Kutta.

Solución Exacta

Una expresión cerrada que satisface la ecuación diferencial en todos los puntos de su dominio.

Solución Numérica

Aproximación de la solución de una ecuación diferencial obtenida mediante métodos iterativos como Euler o Runge-Kutta.

Sistema Dinámico

Sistema matemático descrito mediante ecuaciones diferenciales que evolucionan en el tiempo, como el crecimiento de poblaciones o la disminución de concentraciones.

Tamaño de Paso (h)

Intervalo entre puntos consecutivos en un método numérico. Afecta la precisión y el costo computacional del cálculo.

Tasa de Cambio

Razón a la que una variable dependiente cambia con respecto a una variable independiente, representada como la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Tasa de Crecimiento

Velocidad proporcional al tamaño de una población o cantidad, descrita por un modelo de crecimiento exponencial.

Tasa de Decaimiento

Razón a la que disminuye una cantidad con el tiempo, caracterizada por una constante negativa en modelos exponenciales.

Variable Dependiente

Es la función desconocida que se busca resolver en una ecuación diferencial.

Variable Independiente

Es la variable respecto a la cual se diferencian las funciones. En la ecuación, es la variable independiente.

ALGEBRA BÁSICA Y GEOMETRÍA FUNDAMENTAL:

➢ ***Aritmética de funciones y factorización***

$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd$	$\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c+d}+\dfrac{b}{c+d}$
$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$	$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$
$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$	$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

➢ ***Desarrollo de exponenciales y radicales***

$a^{m+n}=a^m a^n$	$a^{m-n}=a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$
$\sqrt{a}=a^{1/2}$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

➢ ***Ecuación de la recta conocido 2 puntos:***

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

➢ ***Ecuación de la recta conocida la pendiente y el punto de corte y=b***

$$y=mx+b$$

- ***Distancia entre dos puntos geométricos:***

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

PROPIEDADES DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

$log_b(xy) = log_b\, x + log_b\, y$	$log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b\, x - log_b\, y$
$log_b\, m^r = r\, log_b\, m$	$ln\, x = y \rightarrow x = e^y$
$ln\, e = 1$	$e^0 = 1$

REGLAS, TÉCNICAS Y FORMULAS DE DERIVACIÓN DE FUNCIONES

- ***Reglas Básicas de derivación***

DERIVADA DE UNA CONSTANTE $\frac{d}{dx}(c) = 0$	**DERIVADA DE UNA CONSTANTE QUE MULTIPLICA UNA FUNCIÓN** $\frac{d}{dx}[c * f(x)] = c * \frac{d}{dx}[f(x)]$
DERIVADA DE SUMA DE FUNCIONES $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$	**DERIVADA DE RESTA DE FUNCIONES** $\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$
REGLA DEL PRODUCTO $\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'g + fg'$	**REGLA DEL COCIENTE** $\frac{d}{dx}\frac{[f(x)]}{[g(x)]} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
REGLA DE POTENCIA $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	**REGLA DE CADENA** $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$

DERIVACIÓN DE FUNCIONES: EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS PRINCIPALES

$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln(b)$
$\frac{d}{dx}[\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x \ln b}$
$\frac{d}{dx}[sen(f(x))] = cos(f(x))f'(x)$	$\frac{d}{dx}[cos(f(x))] = -sen(f(x))f'(x)$
$\frac{d}{dx}[tan(f(x))] = sec^2(f(x))f'(x)$	$\frac{d}{dx}[cot(f(x))] = -csc^2(f(x))f'(x)$
$\frac{d}{dx}[csc(f(x))] = -csc(f(x))cot\,(f(x))f'(x)$	$\frac{d}{dx}[sec(f(x))] = sec(f(x))tan\,(f(x))f'(x)$

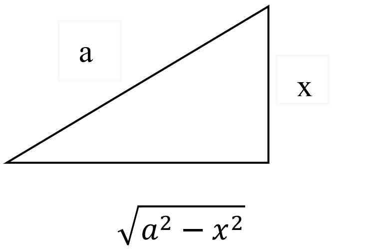
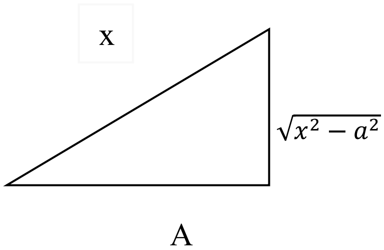
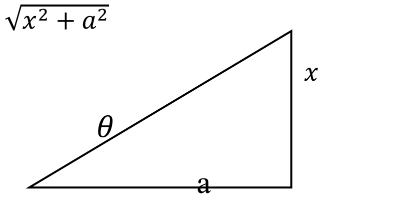
REGLAS, TÉCNICAS Y FORMULAS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES

➢ ***Reglas Básicas de integración***

$\int du = u + C$	$\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
$\int u\,dv = \mu v - \int v du$	$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$
$\int \frac{du}{u} = \ln(u) + C$	$\int e^u du = e^u + C$
$\int b^u du = \frac{b^u}{\ln b} + C$	$\int \ln u = u \ln u - u + C$

$\int sin\, u\, du = -cos\, u + C$	$\int \cos u\, du = sin\, u + C$
$\int sec^2\, u\, du = tan\, u + C$	$\int csc^2\, u\, du = -cot\, u + C$
$\int sec\, u\, tan\, u\ \ du = sec\, u + C$	$\int csc\, u\, cot\, u\ \ du = -\csc u + C$
$\int tan\, u\, du = \ln\,(sec\, u) + C$	$\int \cot u\, du = \ln\,(sen\, u) + C$
$\int sec\, u\, du = \ln\,(sec\, u\ + \tan u) + C$	$\int csc\, u\, du = \ln\,(csc\, u - cot\, u) + C$
$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\,\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$
$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} ln\left(\frac{u+a}{u-a}\right) + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C \qquad a > 0$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$
$\int \sqrt{u^2 + a^2} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$	$\int \sqrt{u^2 - a^2} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$
$\int \sqrt{a^2 - u^2} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\frac{1}{a} ln\left(\frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right) + C$
$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\frac{1}{a} ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right) + C$	

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

FUNCIÓN (INTEGRAL)	TRIANGULO RECTÁNGULO	CAMBIO DE VARIABLE	IDENTIDAD TROGONOMÉTRICA
$\sqrt{a^2 - x^2}$		$x = a\ sen\ \theta$	$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$
$\sqrt{x^2 - a^2}$		$x = a\sec\theta$	$sec^2\theta - tan^2\theta = 1$
$\sqrt{x^2 + a^2}$		$x = a\tan\theta$	$csc^2\theta - cot^2\theta = 1$

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

BIBLIOGRAFÍA

Barrera, J., Suárez, D., & Melgarejo, L. M. (2010). II. Análisis de crecimiento en plantas. Experimentos en fisiología vegetal. Melgarejo, LM (Ed). Laboratorio de Fisiología y Bioquímica Vegetal. Departamento de Biología. Universidad Nacional de Colombia, 25-39.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems (11th ed.). Wiley.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2015). Numerical Analysis (10th ed.). Cengage Learning.

Butcher, J. C. (2016). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (3rd ed.). Wiley.

Carmona, I., & López, E. (2011). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Pearson.

Chapra, S., & Canale, R. (2015). *Métodos numéricos para ingenieros.* México: Mc Graw Hill.

García Hernandez, A. E. (2014). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Grupo Editorial Patriz.

Kincaid, D., & Cheney, W. (2010). Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing (3rd ed.). Brooks/Cole.

Moya, L. M., & Rojas, E. (2020). *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Técnicas de Resolución.* Bogotá.

Nieto, H. (2004). *Aplicaciones del Cálculo Diferencial.* Mérida.

Ross, S. (1992). *Ecuaciones Diferenciales.* Barcelona: Editorial Reverté.

Simmons, G. (2017). *Differential Equations with applications and historical notes.* Boca Ratón: CRC PRESS.

Teppas, P. (2020). II. Ejemplos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden. Universidad Metropolitana.

Verhulst, F. (2005). Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems. Springer.

Zill, D. G. (2002). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. International Thomson, México D. F.

AUTORES

Carmen Elena Mantilla Cabrera

Magíster en Seguridad Telemática, Máster en Ingeniería Matemática y computación, Ingeniera en Electrónica y Computación. Docente de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo desde el 2018. Miembro del Grupo de Investigación Seguridad Informática y Telecomunicaciones, Grupo de Investigación de Energías Renovables y del Centro de Energías Alternativas CEAA-ESPOCH. Investigador de los proyectos: Estudio del potencial energético de la provincia del Chimborazo apoyado únicamente con energías renovables, Simulación computacional de potencial eólico en la provincia de Chimborazo, Desarrollo de una investigación aplicada para el diseño de herramientas tecnológicas para aprendizaje de energías alternativas en la ciudad de Riobamba, Solución SDN - sistema de aprendizaje para identificación y clasificación de amenazas internas que mejoren el control y la seguridad en intranets académicas y Macro optimización técnica y económica del proyecto de los parques eólicos. Aplicación en la provincia de Chimborazo - Ecuador. Ha publicado obras de relevancia y artículos científicos.

Paulina Fernanda Bolaños-Logroño

Ingeniera en Electrónica y Computación, Escuela Superior Politécnica del Chimborazo. Magister en Sistemas de Control y Automatización Industrial, Escuela Superior Politécnica del Chimborazo. Máster Universitario en Estadística Aplicada, Universidad de Granada – España. Ph. D (c) Programa de Doctorado en Estadística Multivariante Aplicada, Universidad de Salamanca – España. Docente Investigador en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Grupo de investigación BI-DATA, Riobamaba – Ecuador.

Fernando Ricardo Márquez Sañay.

Ingeniero mecánico 10 años de experiencia en sector hidrocarburífero ecuatoriano, trabajó en empresas privadas en el área de producción petrolera. Posterior culminó con éxito su formación de cuarto nivel en Ingeniería matemática y computación. Desde el año 2021 y hasta la actualidad se desempeña como docente-investigador ocasional en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo Sede Riobamba, catedrático en asignaturas de Matemáticas, Estadística descriptiva e Inferencial en la Facultad de Administración de Empresas de la mencionada Institución de Educación Superior.

Francisco Eduardo Toscano Guerrero

Ingeniero Civil. Magister en Matemática Aplicada. Magister en Docencia Universitaria y Administración Educativa. Diploma Superior en Liderazgo Institucional (Posgrado). Especialista en Gestión y Desarrollo de Instituciones Educativas (Posgrado).

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SUS APLICACIONES

Carmen Elena Mantilla Cabrera

Paulina Fernanda Bolaños Logroño

Fernando Ricardo Márquez Sañay

Francisco Eduardo Toscano Guerrero

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH)

Carmen Elena Mantilla Cabrera
Paulina Fernanda Bolaños Logroño
Fernando Ricardo Márquez Sañay
Francisco Eduardo Toscano Guerrero

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ISBN: 978-9942-48-873-2
9 789942 488732